Մաթեմատիկոսի արդարացում

Դպիր 2016

Գոդֆրի Հարդի

Թարգմանությունը՝ Գևորգ Հակոբյանի

Գոդֆրի Հարդի

Մաթեմատիկոսի արդարացում

Մաթեմատիկան ինչ-որ իմաստ ունի

Պրոֆեսիոնալ մաթեմատիկոսի համար մաթեմատիկայի մասին գրելը տխուր զբաղմունք է: Մաթեմատիկոսը պետք է արժեքավոր ինչ-որ գործ անի, նոր թեորեմներ ապացուցի, որպեսզի ավելացնի մաթեմատիկական գիտելիքը, այլ ոչ թե պատմի իր կամ մյուս մաթեմատիկոսների կատարած աշխատանքի մասին: Պետական գործիչներն արհամարհում են քաղաքականության մասին գրողներին, նկարիչներն արհամարհում են արվեստի մասին գրողներին: Բժիշկները, ֆիզիկոսները կամ մաթեմատիկոսները սովորաբար նույն զգացողությունն են ունենում: Չկա ավելի խորը և ըստ էության ավելի հիմնավորված արհամարհանք, քան այն, որ ստեղծող մարդիկ տածում են բացատրողների նկատմամբ: Ուրիշի արդյունքերը շարադրելը, քննադատելը, գնահատելը երկրորդ տեսակի ուղեղների համար է աշխատանք: Հիշում եմ, որ մի անգամ Հաուսմանի[1] հետ լուրջ զրույցներից մեկի ժամանակ հարկ եղավ քննարկել այս հարցը: Լեսլի Ստիֆենի[2] հիշատակին նվիրված իր «Բանաստեղծության կոչումն ու բնույթը» դասախոսության մեջ Հաուսմանը վճռականորեն ժխտում էր իր հարելը «քննադատներին», բայց դա անում էր, ինչպես ինձ թվաց, շատ տարօրինակ ձևով. նա հիացմունք էր արտահայտում գրական քննադատության նկատմամբ, ինչը մտահոգեց և շշմեցրեց ինձ:
Նա քաներկու տարի առաջ իր երդմնակալության ժամանակ կարդացած դասախոսությունից մի հատվածով սկսեց: «Չեմ կարող պնդել, թե գրական քննադատի տաղանդը Բարձրյալի լավագույն նվերն է, բայց նա, ըստ երևույթին,

---

[1] Ալֆրեդ Էդվարդ Հաուսման (Alfred Edward Housman) 1859-1936, Ժամանակին անգլիացի հայտնի բանաստեղծ:
[2] Սեր Լեսլի Ստիֆեն (Leslie Stephen) 1832-1904, անգլիացի պատմաբան, գրող, քննադատ, ալպինիստ:

այդպես է համարում, քանի որ գրական քննադատի տաղանդը շատ հազվագյուտ բան է: Բանաստեղծներն ու ճարտասանները սև հաղարջի պտուղների համեմատ հազվադեպ են հանդիպում, բայց ավելի հաճախ, քան Հալեյի[3] գիսավորի վերադարձը: Գրական քննադատներն ավելի հազվագյուտ են...»:
Եվ հետո. «Քսաներկու տարվա ընթացքում որոշ առումով ես կատարելագործվել եմ և վատացել այլ առումով, բայց չեմ կատարելագործվել այնքան, որ գրական քննադատ դառնամ, ինչպես նաև չեմ վատացել այնքան, որ երևակայեմ, թե դարձել եմ այդպիսին»:

Ինձ աղետալի թվաց, որ այդ նշանավոր գիտնականն ու հիանալի բանաստեղծն այդպես է գրում, և մի քանի շաբաթ հետո, նախասրահում նրան հանդիպելով՝ սիրտ արեցի և հայտնեցի կարծիքս: Իսկապե՞ս նրա ասածը պետք էր լուրջ ընդունել: Իսկապե՞ս քննադատներից լավագույնի կյանքը նրա կարծիքով համեմատելի է գիտնականի կամ բանաստեղծի կյանքի հետ: Այս հարցերը քննարկեցինք ամբողջ ճաշի ընթացքում, և ինձ թվաց, թե նա ինձ հետ համաձայնեց: Չի կարելի կարծել, թե իմ դիալեկտիկական հաղթանակն եմ ազդարարում մի մարդու նկատմամբ, որ ինձ այլևս չի կարողանում հակաճառել... Բայց զրույցի վերջում առաջին հարցին նրա պատասխանը եղավ. «Հնարավոր է, ոչ լիովին», իսկ երկրորդին՝ «Հավանաբար, ոչ»:

Հաուսմանի զգացողությունների մասին կարող են ինչ-ինչ կասկածներ լինել, և չեմ պնդում, թե նա իմ կողմն անցավ, բայց դրա փոխարեն որևէ կասկած չկա, թե այդ մասին ինչ են մտածում գիտության մարդիկ, և ես լիովին համաձայն եմ: Բայց, որ հիմա նստած գրում եմ մաթեմատիկայի «մասին», այլ ոչ թե զբաղվում բուն մաթեմատիկայով, խոսում է սեփական թուլության մասին, ինչի համար երիտասարդ և ավելի ուժեղ մաթեմատիկոսները կարող են արհամարհել կամ խղճալ ինձ: Մաթեմատիկայի մասին գրում եմ այն պատճառով, որ ցանկացած ուրիշ մաթեմատիկոսի նման վաթսունից հետո մտքի թարմություն, էներգիա և համբերություն չունեմ, որ իմ անմիջական աշխատանքը հաջողությամբ կատարեմ:

Մտադիր եմ գրել ի պաշտպանություն մաթեմատիկայի: Հնարավոր է ասեն, որ դրա անհրաժեշտությունը չկա, քանի որ հիմա գիտության մի քանի բնագավառ կա միայն, որ ընդունված կարծիքի համաձայն (հիմնավորված կամ չհիմնավորված) ավելի շահավետ և հարգված է համարվում: Հնարավոր է, որ այդպես է: Ամեն դեպքում, շատ հավանական է, որ Էնշտեյնի շշմեցնող հաղթանակներից հետո աստղերի աստղագիտությունը և ատոմային ֆիզիկան այն բացառիկ գիտություններն են, որ

[3] Էդմունդ Հալեյ (Edmond Halley), 1656-1742, անգլիացի աստղագետ, մաթեմատիկոս. Նրա անունով է կոչվում պայծառ գիսաստղերից մեկը, որը 75-76 տարի պարբերությամբ մոտենում է Արեգակին:

հասարակական կարծիքը մաթեմատիկայից ավելի բարձր է դնում: Ներկայումս մաթեմատիկոսն իր մասնագիտությունը պաշտպանելու կարիք չունի: Նա կարիք չունի պատասխանելու այն առարկություններին, որ նկարագրել է Բրեդլին[4] մետաֆիզիկայի իր սքանչելի պաշտպանության մեջ, որ «Տեսություն և իրականություն» գրքի ներածությունն է:

Մետաֆիզիկոսը, ասում է Բրեդլին, կառարկի, թե «մետաֆիզիակական գիտելիքը միանգամայն անհնար է», կամ որ «եթե նույնիսկ դա մինչև ինչ-որ աստիճան հնարավոր է, ապա գործնականում դա չի կարելի գիտելիք համարել»: «Մետաֆիզիկոսը ստիպված է լսել նույն խնդիրները, նույն բանավեճերը, նույն բացարձակ ձախողումը: Ինչո՞ւ չհրաժարվեք այս ամենից: Մի՞թե ձեր ճիգերին ավելի համապատասխան ուրիշ բան չկա»: Հասկանալի է, որ այնպիսի մի հիմար չի լինի, որ համարձակվի մաթեմատիկայի մասին այդպես խոսել: Մաթեմատիկական ճշմարտությունների մեծ մասն ակնհայտ և տպավորիչ է: Մաթեմատիկան տպավորում է: Մաթեմատիկայի գործնական կիրառությունները, կամուրջները, շոգեշարժիչները և դինամո-մեքենաներն ամենաարգելակված երևակայության վրա էլ խորը տպավորություն են թողնում: Լայն հասարակությանը հարկ չկա համոզելու, որ մաթեմատիկան ինչ-որ իմաստ ունի:

Այս ամենը շատ հարմար է մաթեմատատիկոսների համար, բայց իսկական մաթեմատիկոսը դժվար թե դրանով հանգստանա: Յանկացած իսկական մաթեմատիկոս պետք է զգա, որ իսկական մաթեմատիկան նշված կոպիտ, շոշափելի հաջողությունների վրա չի հենվում, որ լայն հասարկության աչքերում մաթեմատիկայի հեղինակությունը չիմացության և սխալ պատկերացումների վրա է հենվում, և որ հնարավոր է մաթեմատիկայի ավելի ողջամիտ պաշտպանություն: Այնուամենայնիվ, մտադիր եմ այդպիսի փորձ կատարել: Իմ խնդիրն ինձ ավելի հեշտ է թվում, քան մետաֆիզիկան պաշտպանելու Բերդլիի ձեռնարկած դժվար փորձը:

Այս առնչությամբ ցանկանում եմ հարցնել՝ ընդհանրապես արժե՞ մաթեմատկան լուրջ ուսումնասիրել: Իրականում ո՞րն է մաթեմատիկոսի կյանքի արդարացումը: Իմ պատասխանները մեծ մասամբ այնպիսին կլինեն, ինչ պետք էր սպասել մաթեմատիկոսից՝ խորապես հավատացած եմ, որ մաթեմատիկայով արժե զբաղվել, դրա համար բազմաթիվ հիմնավորումներ կան: Բայց անմիջապես ուզում եմ հայտարարել, որ մաթեմատիկան պաշտպանելով՝ ինքս ինձ եմ պաշտպանում, և իմ արդարացումը անխուսափելիորեն որոշակի աստիճանի եսասիրական կլինի: Չեմ

[4] Ֆրենսիս Հերբերտ Բրեդլի (Francis Herbert (F. H.) Bradley), 1846-1924, անգլիացի իդեալիստ փիլիսոփա:

կարծում, որ պետք է ներողություն խնդրեմ ընտրածս մասնագիտության համար, եթե նույնիսկ մաթեմատիկայում ինձ անհաջողակ եմ համարում:

Նման տեսակի որոշ եսասիրություն անխուսափելի է, և չեմ կարծում, որ արդարանալու իրական պատճառ կա: Լավ աշխատանք ամենևին էլ «համեստ» մարդկանց ձեռքերով չի արվում: Որևէ առարկա դասավանդող ցանկացած պրոֆեսորի կարևոր պարտականություններից մեկն այն է, որ մի քիչ չափազանցնի իր առարկայի կարևորությունը և դրա զարգացման գործում իր ներդրումը: Իրեն անընդհատ «Արժի՞ զբաղվել նրանով, ինչ անում եմ», և «Ես ա՞յն մարդն եմ, որ այս գործը կարող է անել» հարցնող մարդը միշտ ոչ արդյունավետ կլինի և միաժամանակ մյուսներին էլ կսառեցնի: Նա պետք է թեթևակի աչք փակի և իրեն ու իր առարկան մի քիչ ավելի բարձր գնահատի, քան արժանի են: Դա այնքան էլ շատ դժվար չէ, ավելի դժվարը աչքերը չափազանց պինդ չփակելն ու քո առարկան և քեզ ծիծաղի առարկա չդարձնելն է:

Իր գոյությունն ու իր գործունեությունը արդարացնել ցանկացող մարդը պետք է զանազանի ըստ էության տարբեր երկու հարց: Առաջինը՝ արժե՞ զբաղվել նրանով, ինչով զբաղվում է, և երկրորդ՝ ինչո՞ւ է ինքն այդ գործով զբաղվում (ինչքան էլ, որ արժեքավոր լինի այն, ինչով զբաղվում է):

Առաջին հարցին պատասխանելը՝ հաճախ շատ դժվար, իսկ պատասխանը հուսահատեցնող է լինում, բայց մարդկանց մեծ մասը երկրորդ հարցը բավական հեշտ է համարում: Նրանց պատասխանները, եթե ազնիվ են, սովորաբար հետևյալ երկու ձևերից մեկով է լինում, ընդ որում երկրորդ ձևը միայն առաջինի թեթևակի փոփոխված տարբերակն է, որն ավելի լուրջ կուսումնասիրենք:

Ա. «Զբաղվում եմ այս գործով, որովհետև սա միակ բանն է, որ կարողանում եմ լավ անել: Փաստաբան եմ, բորսային միջնորդ կամ պրոֆեսիոնալ կրիկետիստ[5], որովհետև որոշակի տաղանդ ունեմ, որն ինձ թույլ է տալիս կատարել հենց այս աշխատանքը: Փաստաբան եմ, որովհետև ճարտար խոսք ունեմ, և ինձ հետաքրքրում են իրավաբանական նրբությունները: Բորսային միջնորդ եմ, որովհետև արժեթղթերի շուկայում իրավիճակն արագ և ճիշտ եմ կարողանում գնահատել: Պրոֆեսիոնալ կրիկետիստ եմ, որվհետև կրեկետ շատ լավ եմ կարողանում խաղալ: Ընդունում եմ, որ բանաստեղծ կամ մաթեմատիկոս լինելն ավելի լավ է, բայց, ցավոք, պոեզիայով կամ մաթեմատիկայով զբաղվելու տաղանդով օժտված չեմ»:

[5] Կրիկետ - անգլիական ազգային խաղ է: Խաղում են երկու թիմով՝ 11-ական խաղացողով, խոտածածկ խաղադաշտում:

Ամեննին չեմ պնդում, որ մարդկանց մեծ մասը կարող է նման փաստարկներ բերել իրեն արդարացնելու համար, քանի որ մարդկանց մեծ մասն ընդհանրապես չի կարողանում ինչ-որ բան լավ անել: Բայց նման արդարացումն անխոցելի է դառնում, եթե հնարավոր է լինում առաջ քաշել առանց հակասությունների մեջ ընկնելու, ինչպես մարդկանց աննշան փոքրամասնությունն է կարողանում անել. հավանաբար, մարդկանց հինգ կամ տասը տոկոսն է կարող ինչ-որ բան համեմատաբար ոչ վատ անել, շատ քիչ մարդիկ կարող են ինչ-որ բան լավ անել, իսկ երկու բան լավ անել կարողացողների թիվը չափազանց փոքր է: Եթե մարդն իսկական տաղանդով է օժտված, առանց կասկածելու պետք է ցանկացած զոհողության գնա սեփական տաղանդը լրիվ բացահայտելու համար:

Այս տեսակետը պաշտպանում է դոկտոր Ջոնսոնը[6]:

Երբ նրան ասացի, որ ինձ հաջողվել է տեսնել, թե ինչպես է նրա անվանակից Ջոնսոնը միաժամանակ երեք ձիով սլանում, նա պատասխանեց. «Այդպիսի մարդուն, պարոն, պետք է խրախուսել, քանի որ այն, ինչ նա անում է, ցուցադրում է մարդկային հնարավորությունների սահմանը»:

Հասկանալի է, որ դոկտոր Ջոնսոնը կծափահարեր ալպինիստներին, Լամանշը լողալով անցնողներին, կույր շախմատ խաղացողներին: Ես էլ եմ շատ հավանում բոլոր նման փորձերը, որ մեծ նվաճումների են ուղղված: Մեծ համակրանքով եմ վերաբերվում նույնիսկ աճպարարներին և որովայնախոսներին, և երբ Ալյոխինը[7] և Բրեդմենը[8] փորձում են ռեկորդ սահմանել, խորը ՛հիասթափություն եմ ապրում, եթե անհաջողության են մատնվում: Այս հարցում և՛ դոկտոր Ջոնսոնը, և՛ ես լրիվ համաձայն ենք լայն հասարակության հետ: Ինչպես ճշգրիտ արտահայտվել է Ու. Թըրները[9], միայն «պնդաճակատները» (բացասական իմաստով) չեն հիանում իսկական «մեծ մարդկանցով»:

Հասկանալի է, որ չի կարելի անտեսել, որ գործունեության տարբեր տեսակներ տարբեր արժեք ունեն: Կգերադասեի վիպագիր կամ նկարիչ լինել, քան նույն կարգի քաղաքական գործիչ. հռչակի հասցնող տարբեր ճանապարհներ կան, որ մեզանից շատերը մերժում են, որպես անընդունելի: Սակայն աշխատանք ընտրելիս հիմնական սանդղակը հազվադեպ է այս կամ այն մասնագիտության արժեքների տարբերությունը լինում. գործունեության տեսակը համարյա միշտ թելադրվում է

[6] Սեմուել Ջոնսոն (Samuel Johnson), 1709-1784, անգլիացի բանաստեղծ, լեզվաբան, գրական քննադատ. Ռուսերեն թարգմանությունում բերված այս հղումը ճիշտ չեմ համարում, քանի որ Հարդին չէր կարող խոսել իր ծնունդից 93 տարի առաջ մահացած մարդու հետ:

[7] Ալեքսանդր Ալեխին (Alexsander Alekhin) 1892-1946, շախմատիստ, աշխարհի չեմպիոն:

[8] Դոնալդ Ջորջ Բրեդմեն (Donald Bradman) 1908-2001, ավստրիալիացի կրիկետիստ:

[9] Ջոզեֆ Մելորդ Ուիլյամ Թըրներ (Joseph Mallord William Turner), 1775-1851, Բրիտանացի գեղանկարիչ:

մարդու բնական կարողությունների սահմանափակություններով: Պոեզիան ավելի բարձր արժեք ունի, քան կրիկետը, բայց Բրեդմենը վերջին հիմարը կլիներ, եթե կրիկետը զոհաբերեր, որպեսզի երկրորդ տեսակի և անկարևոր բանաստեղծությունների հեղինակ դառնար (քիչ հավանական եմ համարում, որ պոեզիայում նա ավելիին հասներ): Եթե Բրեդմենը կրիկետ այդքան լավ չխաղար, իսկ պոեզիայում նրա հաջողություններն ավելի նշանակալից լինեին, ընտրություն կատարելն ավելի դժվար կլիներ: Չգիտեմ, թե կուզենայի ով լինել՝ Վիկտոր Տրամպերը[10], թե Ռուպերտ Բրուկը[11]: Բարեբախտաբար, նման երկընտրանքը հազվադեպ է լինում:

Կարող եմ ավելացնել, որ նման երկընտրանքի հայտնվելը մաթեմատիկոսի առջև քիչ հավանական է: Մաթեմատիկոսների և մյուս մարդկանց մտածողական պրոցեսների միջև տարբերությունը սովորաբար շատ չափազանցված է, սակայն չի կարելի ժխտել, որ մաթեմատիկական կարողությունները հատուկ տեսակի տաղանդ են և, որ մաթեմատիկոսները որպես դաս՝ առանձնապես ոչնչով չեն տարբերվում մյուս մարդկանցից՝ ո՛չ ընդհանուր կարողություններով, ո՛չ մտածողության արագությամբ: Եթե մարդն ինչ-որ իմաստով իսկական մաթեմատիկոս է, մեկից մեկ պարզ է, որ մաթեմատիկայում ավելի շատ բանի կհասնի, քան այլ բնագավառում, և հիմարություն կլիներ, եթե նա տրվեր իր տաղանդն այլ բնագավառում բացահայտելու որևէ խաբուսիկ հնարավորության: Նման զոհողությունը կարելի կլիներ արդարացնել, թերևս, տնտեսագիտական անհրաժեշտությամբ կամ տարիքով:

Մի քանի բառ պետք է ասեմ տարիքի մասին, որը շատ կարևոր է մաթեմատիկոսների համար: Ոչ մի մաթեմատիկոս չպետք է մոռանա, որ մաթեմատիկան ավելի շատ, քան արվեստի որևէ տեսակ կամ մի այլ գիտություն, երիտասարդ մարդկանց գործ է: Բերեմ համեմատաբար համեստ մակարդակի, հասարակ օրինակ՝ Արքայական ընկերություն ընտրված մաթեմատիկոսներն ամենափոքր միջին տարիքն ունեն:

Հասկանալի է, որ առանց դժվարության կարող ենք ավելի զարմանալի օրինակներ բերել: Կարող ենք դիտարկել գործունեությունը մի մարդու, որ աշխարհի երեք մեծագույն մաթեմատիկոսներից մեկն է, անկասկած: Նյուտոնը մաթեմատիկայով զբաղվելուց դադարել է հիսուն տարեկանում և նախկին խանդավառությունը կորցրել դրանից շատ առաջ: Նա, անկասկած, երբ լրացել է քառասուն տարին, գիտակցել է, որ իր ստեղծագործական գործունեության ծաղկումն արդեն անցել է: Նրա մեծագույն գաղափարները՝ ֆլյուքսները և համաշխարհային ձգողականության օրենքը, ծնվել են մոտավորապես 1666թ., երբ Նյուտոնը քսանչորս տարեկան էր: «Այն ժամանակ ուժերիս ծաղկման շրջանում էի՝ հարմար տարբեր տեսակի նորարարություն

[10] Վիկտոր Տրամպեր (Victor Trumper), 1877-1915- ավստրիալացի հայտնի կրիկետիստ:
[11] Ռուպերտ Բրուկ (Rupert Chawner Brooke), 1887-1915, անգլիացի պոետ:

բացահայտելու համար, և մաթեմատիկայի ու փիլիսոփայության մասին ավելի շատ էի մտածում, քան երբևէ դրանից հետո»: Նյուտոնն իր մեծագույն հայտնագործությունները կատարել է նախքան քառասուն տարեկան դառնալը («էլիպտիկ ուղեգծերը» հայտնագործել է երեսունյոթ տարեկանում), իսկ հետագայում նրան քիչ բան է հաջողվել անել, միայն հղկել և կատարելագործել է այն, ինչ առաջ արել էր:

Գալուան[12] մահացել է քսանմեկ տարեկանում, Աբելը[13]՝ քսանյոթ, Ռամանուջանը[14]՝ երեսուներեք, Ռիմանը[15]՝քառասուն: Եղել են մարդիկ, ովքեր կարևոր գործեր արել են նաև ավելի հասուն տարիքում: Գաուսի[16] հիանալի աշխատանքը դիֆերենցիալ երկրաչափությունից հրապարակվել է, երբ նա հիսուն տարեկան էր (չնայած որ հիմնական գաղափարները ստեղծվել էին տասնամյակ առաջ): Ինձ հայտնի չէ դեպք, երբ մաթեմատիկական խոշոր հայտնագործությունն արած լինի հիսունն անց մարդ: Եթե մարդը մեծ հասակում մաթեմատիկայի հանդեպ կորցնում է հետաքրքրությունը և դադարում է մաթեմատիկայով զբաղվելուց, քիչ հավանական է, որ կորուստը շատ զգալի լինի և՛ մաթեմատիկայի, և՛ իր համար:

Մյուս կողմից, քիչ հավանական է, որ դրանից օգուտը շատ էական է եղել: Մաթեմատիկոսների ցանկը, որ ուշ տարիքում են դադարել մաթեմատիկայով զբաղվել, շատ չի ոգևորում: Նյուտոնը դրամական պալատի կոմպետենտ տնօրեն դարձավ (երբ ոչ մեկի հետ չէր վիճել): Պենլևեն[17] դարձավ Ֆրանսիայի ոչ այնքան հաջող վարչապետ: Լապլասի[18] քաղաքական կարիերան շատ խայտառակ եղավ, չնայած նրան չի կարելի հարմար օրինակ համարել. Լապլասն ավելի շուտ անազնիվ էր, քան ոչ կոմպետենտ, բայց երբեք իրականում «չլքեց» մաթեմատիկան: Որքան ինձ հայտնի է, չկա այդպիսի օրինակ, երբ բարձր կարգի մաթեմատիկոսը դադարի մաթեմատիկայով զբաղվելուց և հասնի նման բարձր արդյունքների ուրիշ

---

12 Էվարիստ Գալուա (Évariste Galois), 1811-1832- ֆրանսիացի մեծ մաթեմատիկոս, ով համարվում է ժամանակակից բարձրագույն հանրահաշվի հիմնադիրը:

13 Նիլս Հենրիկ Աբել (Niels Henrik Abel), 1802-1829- նորվեգացի մաթեմատիկոս:

14 Սրինիվասա Ռամանուջան Այենգոր (Srīnivāsa Rāmānujan Iyengar), 1887-1920, հնդիկ մաթեմատիկոս:

15 Գեորգ Ֆրիդրիխ Բերնհարդ Ռիման (Georg-Friedrich-Bernhard Riemann), 1826-1866, գերմանացի մաթեմատիկոս:

16 Յոհան Կարլ ֆրիդրիխ Գաուս (Johann Carl Friedrich Gauß), 1777-1855, գերմանացի մաթեմատիկոս, համարվում է բոլոր ժամանակների լավագույն մաթեմատիկոսներից մեկը:

17 Պոլ Պենլևե (Paul Painlevé), 1863-1933, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս և մեխանիկ, 1915-1916թ. եղել է Ֆրանսիայի ժողովրդական լուսավորության և ինֆորմացիայի նախարարը, 1917թ. և 1926-1929թ. եղել է ռազմական նախարարը, 1917թ. և 1925թ. վարչապետ, 1930-1933թ. ավիացիայի նախարարը:

18 Պիյեր Սիմոն Լապլաս (Pierre-Simon de Laplace), 1749-1827, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, աստղագետ, ֆիզիկոս, 1799թ. ֆրանսիայի ներքին գործերի նախարար:

բնագավառում: Հնարավոր է, որ եղել են մի քանի երիտասարդներ, որ կարող էին առաջնակարգ մաթեմատիկոսներ դառնալ, եթե զբաղվեին մաթեմատիկայով, բայց երբեք չեմ լսել այդպիսի ճշմարտանման դեպքի մասին: Դրանից բացի, այս ամենը լրիվ համապատասխանում է իմ սեփական շատ սահմանափակ փորձին: Իսկական տաղանդ ունեցող ցանկացած երիտասարդ, ում ճանաչել եմ, անկեղծ նվիրված է եղել մաթեմատիկային, և ոչ թե հավակնությունների պակասի, այլ դրանց ավելցուկի պատճառով: Այդ բոլոր երիտասարդները հստակ գիտակցում էին, որ իրենք հենց մաթեմատիկայում կարող են ճանաչման հասնել, եթե դա ընդհանրապես հնարավոր էր:

Արժե՞ զբաղվել մաթեմատիկայով

Մի բան էլ կա, որ կանվանեի ստանդարտ արդարացման «ավելի համեստ տարբերակը», բայց դրանից հեշտ կարելի է ազատվել մի քանի բառով:

Բ. «Չկա այնպիսի բան, որ շատ լավ կարող էի անել: Զբաղվում եմ նրանով, ինչով զբաղվում եմ, որովհետև այդպես է ստացվել: Իրականում երբեք առիթ չեմ ունեցել այլ բանով զբաղվելու»: Այս արդարացումն էլ եմ համոզիչ համարում: Բացարձակ ճշմարտություն է, որ մարդկանց մեծ մասը ոչ մի բան չի կարողանում լավ անել: Քանի որ այդպես է, առանձնապես նշանակություն չունի, թե ինչ կարիերա են ընտրում, և այդ մասին խոսելն էլ արդեն իմաստ չունի: Սա բավականին համոզիչ պատասխան է, բայց դույզն-ինչ հպարտության ունեցող մարդը հազիվ թե այսպիսի պատասխան տա, և կարող եմ ենթադրել, որ մեզանից ոչ մեկը նման պատասխանի հետ չէր համաձայնի:

Եկել է 3-րդ պարագրաֆում առաջ քաշած հարցերից առաջինի մասին խորհելու ժամանակը. հարց, որը շատ ավելի դժվար է, քան երկրորդը: Արժե՞ զբաղվել մաթեմատիկայով (նրանով, ինչ մաթեմատիկա ասելով հասկանում ենք ես և մյուս մաթեմատիկոսները), և եթե արժե, ինչո՞ւ: Վերընթերցում եմ իմ երդմնակալության դասախոսության առաջին էջերը, որ 1920թ. Օքսֆորդում եմ կարդացել: Ըստ էության այնտեղ սեղմ շարադրված է մաթեմատիկայի պաշտպանության հիմնական բովանդակությունը: Շարադրանքը շատ սեղմ է (երկու էջից էլ պակաս), գրված մի ոճով, որ հիմա ինձ առանձնապես դուր չի գալիս. երևի «օքսֆորդյան ոճով» (ինչպես այն ժամանակ էր ինձ թվում) գրված առաջին աշխատանքս է: Հիմա էլ հակված եմ մտածելու, որ չնայած հետագա զարգացմանը, իմ երդմնակալության դասախոսությունն այնուամենայնիվ ընդգրկում է մաթեմատիկայի արդարացման հիմնական գաղափարները: Հիշեցնեմ, թե ինչ եմ այն ժամանակ ասել՝ որպես ավելի մանրամասն քննարկման ներածություն:

1) Սկսել եմ նրանով, որ ընդգծել եմ մաթեմատիկայով զբաղվելու անվնաս լինելը. մաթեմատիկա ուսումնասիրելը եթե նույնիսկ օգտակար չէ, ամեն դեպքում անվնաս ու անմեղ է: Այդ կարծիքին եմ մնում, չնայած այն ավելի ընդարձակ շարադրման և պարզաբանումների կարիք ունի:

Մի՞թե անօգուտ է մաթեմատիկան: Որոշ իմաստով, եթե պարզ ասենք, իհարկե, անօգուտ չէ. օրինակ՝ շատ թվով մարդկանց մեծ բավարարվածություն է պատճառում: Սակայն «օգտակար» բառն ավելի նեղ իմաստով եմ օգտագործել՝ «օգտակա՞ր» է մաթեմատիկան, տալի՞ս է ուղղակի օգուտ մյուս գիտությունների նման, ինչպիսիք են քիմիան և ֆիզիոլոգիան: Սա հեշտ հարցերից չէ ու անվիճելի չէ, և ես շատ վճռական «Ոչ» կպատասխանեմ, չնայած որոշ մաթեմատիկոսներ (և մյուսների մեծ մասը), անկասկած, կպատասխանի «Այո»: «Անվնա՞ս է» արդյոք մաթեմատիկան: Այս հարցի պատասխանն էլ բոլորովին ակնհայտ չէ, իսկ հարցը նրանցից է, որոնց կգերադասեի չպատասխանել, քանի որ անմիջականորեն շոշափում է պատերազմական գործողությունների վրա գիտության ազդեցության խնդիրը: Անվնա՞ս է մաթեմատիկան այն իմաստով, որով անշուշտ անվնաս չէ քիմիան: Հետագայում դեռ կվերադառնամ վերոհիշյալ երկու հարցին:

2) Իմ երդմնակալության դասախոսության մեջ ասել եմ. «Տիեզերքի չափսերն ահռելի են, և եթե իզուր տեղը ժամանակ ենք վատնում, ապա համալսարանական մի քանի դոնի [19] անիմաստ ապրած կյանքն այնքան էլ տիեզերական աղետ չէ»: Այս մասին հասնելով՝ երևի ընդունել կամ փորձել եմ ընդունել չափազանցված խոնարհության դիրք, որից հենց նոր հրաժարվեցի: Վստահ եմ, որ իրականում ուրիշ բան եմ ցանկացել ասել՝ փոձելով մի արտահայտությամբ ասել այն, ինչը ավելի մանրամասն շարադրված է 3-րդ պարագրաֆում: Նկատի եմ ունեցել, որ մենք՝ դասավանդողներս, իսկապես որոշակի տաղանդ ունենք, և դժվար թե մոլորություն համարվի դա ամբողջ թափով զարգացնելու ձգտումը:

3) Վերջապես (հիմա ինձ հիվանդագին հռետորական թվացող արտահայտություններով) նշել եմ մաթեմատիկական ձեռքբերումների անանց բնույթը.

«Այն, ինչ անում ենք, հնարավոր է, որ քիչ է, բայց անկասկած անանց բնույթ ունի, իսկ ստեղծել որևէ բան, որը թեկուզ դույզն-ինչ ոչ անցողիկ բնույթ ունի, լինի բանաստեղծության օրինակ, թե երկրաչափական թեորեմ, նշանակում է այնպիսի

[19] Դոն – համալսարանական քոլեջի դասավանդող, ղեկավար, խորհրդատու:

բանի ստեղծում, որն ամբողջությամբ մարդկանց ճնշող մեծամասնության հնարավորություններից դուրս է»:

Եվ հետո. «Անցյալի և ներկայի գիտական ձեռքբերումների հակասության օրերին պետք է ինչ-որ բան ասեմ մի գիտության մասին, որը ոչ Պյութագորասից է սկսվում և ոչ էլ Էյնշտեյնով ավարտվում, այլ ամենահին և ամենաերիտասարդ գիտություններից մեկն է»:

Այս ամենը հռետորություն է, բայց ասածի էությունը հիմա էլ ինձ ճիշտ է թվում, և կարող եմ իմ կողմից առաջ քաշած հարցերը ավելի մանրամասն շարադրել, առանց տրվելու մյուս հարցերից որևէ մեկի նախնական քննարկմանը, որոնք բաց եմ թողնում:

Ելնում եմ այն ենթադրությունից, որ գրում եմ ընթերցողի համար, ով հավակնոտության համապատասխան ոգով լի է կամ անցյալում է եղել: Մարդու, ամեն դեպքում, երիտասարդ մարդու առաջին պարտականությունը հավակնություններն են: Հավակնոտությունն ազնիվ կիրք է, որը տարբեր ձևեր ընդունելու միանգամայն օրինական հիմքեր ունի: Ինչ-որ վեհ բան եղել է և Աթիլի կամ Նապոլեոնի հավակնությունների մեջ, բայց ամենավեհ հավակնոտությունը ղեկավարում է նրանց, ովքեր իրենցից հետո թողնում են անանց արժեք ունեցող որևէ բան.

Ավազի վրա միտք եմ անում,
Ծովի ու ցամաքի արանքում,
Ի՞նչ եմ շինելու կամ գրելու,
Նախքան կգա մայրամուտս՝ ժամն իմ գնալու:

Սեպագրեր անեմ տապանաքարին,
Որ դիմանում են ալիքների պոռթկումներին,
Կամ էլ մի ամրոց արարեմ,
Երկար կյանքով ավելի, քան ես կապրեմ:[20]

Հավակնությունն աշխարհի համարյա բոլոր լավագույն ստեղծագործությունների շարժիչ ուժն է եղել: Մասնավորապես, մարդկանց երջանկության մեջ բոլոր էական ներդրումները գործնականում հավակնոտ մարդիկ են արել: Երկու հայտնի օրինակ բերենք. Լիստերը[21] և Պաստերը[22] մի՞թե հավակնոտ չեն եղել: Կամ, ավելի համեստ

[20] Հաուսմանի անավարտ բանաստեղծության տողերի հայերեն թարգմանությունը Յուրա Գանջալյանինն է:
[21] Ջոզեֆ Լիստեր (Joseph Lister) 1827-1912. անգլիացի գիտնական, վիրաբույժ, վիրաբուժական անտիսեպտիկայի հիմնադիր
[22] Լուի Պաստեր (Louis Pasteur) 1822-1895. ֆրանսիացի գիտնական, միկրոբիոլոգիայի և իմունոլոգիայի հիմնադիրներից

մակարդակի, Քինգ Ժիլետը[23] և Ուիլյամ Ուիլետը[24]: Վերջին ժամանակներում ո՞վ է նրանցից ավելի շատ նպաստել մարդկային երջանկությանը:

Հատկապես լավ օրինակներ կարող ենք վերցնել ֆիզիոլոգիայից, քանի որ այն «օգտակար» գիտությունների թվին է դասվում: Պետք է զերծ մնանք այն սխալներից, որ սովորաբար անում են գիտության ջատագովները, սխալներ, որոնց ենթարկվել է, օրինակ, պրոֆեսոր Ա. Վ. Հիլը[25]: Այդ սխալի համաձայն, ընդունված է համարել, թե այն մարդիկ, որ մարդկության բարգավաճմանը մեծապես նպաստել են, աշխատանքի ընթացքում շատ են մտածել իրենց բարձր առաքելության մասին, կարճ ասած, իբր ֆիզիոլոգները հատուկ վսեմ հոգի ունեն: Ֆիզիոլոգն իհարկե ուրախ է, որ իր աշխատանքը բարեգործություն է մարդկության համար, բայց նրան աշխատանքը կատարելու ուժ և ներշնչանք տվող դրդապատճառները չեն տարբերվում դասական հումանիտար-գիտնականի կամ մաթեմատիկոսի դրդապատճառներից:

Տարբեր ազնիվ դրդապատճառներ կան, որ մարդուն մղում են ուսումնասիրություն անելու, բայց դրանցից երեքը մյուսներից ավելի կարևոր են: Առաջին դրդապատճառը (առանց դրա մյուսները ոչինչ են) մտավոր հետաքրքրասիրությունն է, ճշմարտությունն իմանալու ծարավը: Երկրորդ դրդապատճառը մասնագիտական հպարտությունն է, անհանգստությունը, որը կարելի է հանդարտեցնել միայն մտադրվածը իրականացնելու միջոցով, ամոթը, որը պատում է ցանկացած վարպետի, երբ ստեղծածն արժանի չի լինում իր տաղանդին: Վերջապես երրորդը հավակնոտությունն է, համբավ ու դիրք ձեռք բերելու ծարավը, նաև իշխանություն և փող, որ իր հետ բերում է դիրքը: Հնարավոր է, հաճելի է զգալ, որ արել ես «քո աշխատանքը», ուրախություն ես ավելացրել կամ նվազեցրել ուրիշների տանջանքը, բայց քեզ քո աշխատանքն անելու մղող խթանը դա չէ: Ուստի եթե մաթեմատիկոսը, քիմիկոսը կամ նույնիսկ ֆիզիոլոգը ասեն, որ իրենց աշխատանքի շարժիչ ուժը մարդկությանը բարություն անելու ցանկությունն է եղել, չեմ հավատա նրա բառերին (նմանապես չեմ մտածի այն մասին, թե ով է ավելի լավ ասում, եթե նույնիսկ հավատամ): Իրականում նա ուղղորդվել է վերը նշածս դրդապատճառներով, և այդտեղ այնպիսի բան չկա, որից պետք է ամաչեր արժանապատիվ մարդը:

Եթե մտավոր հետաքրքրասիրությունը, մասնագիտական հպարտությունը և հավակնոտությունը հետազոտության գլխավոր խթաններն են, ապա, անկասկած, ոչ մեկը չունի դրանք ավելի լավ բավարարելու հնարավորություն, քան մաթեմատիկոսը: Նրա հետազոտության առարկան գերհետաքրքիր է. չկա որևէ այլ առարկա, որտեղ

---

[23] Քինգ Քեմփ Ջիլետ (King Camp Gillette) 1855-1932. ամերիկացի գյուտարար, The Gillett Company ֆիրմայի հիմնադիրը:
[24] Ուիլյամ Ուիլիետ – անգլիացի շինարար, ամառային և ձմեռային ժամանակների անցնելու առաջարկողը:
[25] Արչիբալդ Վիվիան Հիլ (Archibald Vivian Hill) 1886-1977. անգլիացի ֆիզիոլոգ, նոբելյան մրցանակի դափնեկիր:

ճշմարտությունն այդքան զարմանալի բաներ անի: Մաթեմատիկան ուսումնասիրության՝ մինչև մանրուքները մշակված հրաշալի ապարատ ունի և անասելի տեղ է թողնում բարձր մասնագիտական վարպետություն ցուցաբերելու համար: Վերջապես, ինչպես բազմաթիվ անգամներ ապացուցել է պատմությունը, մաթեմատիկական ձեռքբերումը, ինպիսին էլ լինի նրա ներքին արժեքը, մյուս գիտությունների ձեռքբերումների համեմատ ավելի մեծ «երկարակեցությամբ» է օժտված:

Կարող ենք համոզվել նույնիսկ կիսապատմական քաղաքակրթությունների օրինակով: Բաբելոնյան և ասորական քաղաքակրթությունները կործանվել են, Համուրաբին[26], Սարգոնը[27] և Նաբուգոդոնոսորը[28] հիմա դատարկ անուններ են. սակայն բաբելոնյան մաթեմատիկան հիմա էլ հետաքրքրություն է ներկայացնում, իսկ համրանքի բաբելոնյան վաթսունական համակարգը դեռ օգտագործվում է աստղագիտության մեջ: Բայց ամենահամոզիչ օրինակը, իհարկե, Հին Հունաստանն է:

Հին հույներն առաջին մաթեմատիկոսներն էին, ում արդյունքները նաև հիմա են մեզ համար արդիական: Հին Արևելքի մաթեմատիկան միգուցե հետաքրքիր է քննասերների համար, բայց հինհունական մաթեմատիկան լրիվ իրական «բան» է: Հին հույներն առաջինն են խոսել այն լեզվով, որ հասկանալի է ժամանակակից մաթեմատիկոսին: Ինչպես մի անգամ Լիթլվուդն էր ասում, հին հույները ոչ խելացի դպրոցական էին, ոչ էլ փայլուն արդյունքների համար «կրթաթոշակի հավակնորդ», այլ «ուրիշ քոլեջի գիտնական»: Այդ պատճառով էլ հինհունական մաթեմատիկան պահպանել է «անանց» նշանակությունը՝ ավելի անանց, քան նույնիսկ հինհունական գրականությունը: Արքիմեդին կհիշեն նաև այն ժամանակ, երբ մոռացած կլինեն Էսքիլեսին[29], քանի որ լեզուները մեռնում են, մինչդեռ մաթեմատիկական գաղափարներն անմահ են: Գուցե և «անմահ»-ը հիմար բառ է, բայց ինչ էլ որ այն նշանակի, հավանաբար մաթեմատիկոսն անմահ լինելու ավելի մեծ հնարավորություն ունի: Մաթեմատիկոսը լուրջ անհանգստանալու կարիք չունի, թե ապագան իր նկատմամբ անարդար կլինի: Անմահությունը հաճախ ծիծաղելի ու դաժան է լինում. մեզանից քչերին է միայն վիճակված Օգ, Անանիա կամ Գալիլեյ լինել: Նույնիսկ մաթեմատիկայում է պատմությունը երբեմն տարօրինակ դեպքեր արձանագրում. Ռոլը հանդիպում է մաթեմատիկական անալիզի բոլոր դասագրքերում, կարծես նույն կարգի մաթեմատիկոս լինի, ինչպես Նյուտոնը. Ֆարեյն անմահություն է ձեռք բերել, քանի որ չի հասկացել այն թեորեմը, որը Խարոսը

[26] Համուրաբի (Ha-am-mu-ra-bi) - բաբելոնյան թագավոր, տիրապետել է մոտավորապես 1793-1750 Ք.ա.:

[27] Սարգոն - ռուսերեն թարգմանիչը նկատի է առնում ասորական թագավոր Սարգոն II-ին, որ թագավորել է 722-705թթ Ք.ա., չնայած կարող էր լինել նաև Սարգոն Աքքադացին, որ թագավորել է 2316-2261թթ Ք.ա.:

[28] Նաբուգոդոնոսոր (Nebuchadnezzar) - նորբաբելոնյան թագավոր, որ թագավորել է 605-562թթ Ք.ա.:

[29] Էսքիլես - 525-456 Ք.ա., հին հույն բանաստեղծ-դրամատուրգ, «ողբերգության հայրը»:

տասնչորս տարի առաջ հիմնավոր ապացուցել էր. Աբելի կենսագրության մեջ հինգ ուննոր նորվեգացիների անունները տեղ են գտել իրենց հանրահայտ հայրենակցի հաշվին իրականացված պարտքի գիտակցմամբ արված թուլամտության գիտակցված ակտի պատճառով: Բայց հիմնականում գիտության պատմությունն արդարացի է, և դա հատկապես ճշմարիտ է մաթեմատիկայի դեպքում: Ուրիշ ոչ մի գիտություն չունի այդքան հստակ և միաձայն ընդունված չափորոշիչներ, և մարդիկ, ում մաթեմատիկոսները հիշում են, համարյա միշտ արժանի են դրան: Մաթեմատիկական փառքը, եթե կարողանաք այն վաստակել, ամենաամուրից և տևականներից է:

Այս ամենը հաճելի է մաթեմատիկայի գիտակների և հատկապես պրոֆեսորների համար: Երբեմն իրավաբանները, քաղաքական գործիչները և գործարարները ենթադրություն են անում, թե ակադեմիական գործունեությունը գրավում է հիմնականում զգույշ և ոչ հավակնոտ, ամենաշատը սեփական անվտանգության և հարմարավետության մասին մտածող մարդկանց: Նման կարծիքը միանգամայն անհիմն է: Դոնը ինչ-որ բանից, մասնավորապես շատ փող աշխատելու հնարավորությունից հրաժարվում է. օրինակ, պրոֆեսորի համար շատ դժվար է մեկ տարում 2000 ֆունտ ստերլինգ աշխատելը: Դիրքի ամրությունը, բնական է, ֆինանսական բարեկեցությունից հրաժարվելը հեշտացնող պատճառներից մեկն է: Բայց Հուսմանը լորդ Սայմոն[30] կամ լորդ Բիվերբրուկ[31] դառնալուց կհրաժարվեր ոչ այդ պատճառով: Նա կմերժեր նրանց գործունեությունն իր հավակնոտության պատճառով. նրա համար ահավոր կլիներ այն միտքը, որ մի քանի տարի հետո իրեն կարող են մոռանալ:

Բայց որքան ցավալի է գիտակցելը, որ ակադեմիական գործունեության բոլոր առավելություններով հանդերձ անհաջողությունից ապահովագրված չեք: Հիշում եմ, որ Բերտրան Ռասելն ինձ իր սարսափելի երազի մասին էր պատմում: Նա երազում տեսել էր, որ 2100 թվականի կողմերը ինքը նստած է համալսարանի գրադարանի վերնի հարկում: Գրադարանավարի օգնականը մեծ զամբյուղը ձեռքին շրջում է գրադարակների միջով: Նա հերթով վերցնում է գրքերը, նայում դրանց անվանումները և կա՛մ նորից տեղն է դնում, կա՛մ շպրտում զամբյուղի մեջ: Վերջապես, հերթը հասնում է մի եռհատորյակի, և Ռասելը ճանաչում է իր «Principia mathematica»-ի պահպանված վերջին օրինակը: Նա դարակից վերցնում է հատորներից մեկը, թերթում մի քանի էջ, ակնհայտորեն մոլորված տարօրինակ

---

[30] Լորդ Ջոն Օլսբրուկ Սայմոն (1873-1954) - անգլիացի քաղաքական գործիչ, այն երեք գործիչներից մեկը, ով կարողացել լինել և ներքին գործերի նախարար և արտաքին:

[31] Ուիլյամ Մաքսվել Էյթքեն Բիվերբրու (1879-1964) - Մեծ Բրիտանիայի կառավարության անդամ, հրատարակչական մագնատ:

նշաններից, ծածկում է հատորը, ծանր ու թեթև է անում և անվճռական կանգ առնում…

Մաթեմատիկոսը, բանաստեղծների և նկարիչների նման, պատկերներ է ստեղծում: Եթե նրա «պատկերներն» ավելի երկարակյաց են, քան նրանցը, այն պատճառով է, որ դրանք գաղափարներից են բաղկացած: Նկարիչն իր պատկերներին ստեղծում է ձևերի և գույների միջոցով, բանաստեղծը՝ բառերի: Պատկերը կարող է «գաղափար» արտահայտել, բայց այդ գաղափարը սովորական առողջ դատողության մակարդակի է և քիչ էական: Բանաստեղծության մեջ գաղափարներն ավելի կարևոր են, բայց ինչպես պնդում է Հուսմանը, սովորաբար գաղափարների կարևորությունը պոեզիայում գերագնահատում են. «Չեմ կարող համաձայնել, որ գոյություն ունի ինչ-որ բան, որ կոչվում է բանաստեղծական գաղափար... Բանաստեղծությունն այն չէ, թե ինչ են ասել, այլ այն, թե ինչպես են ասել»:

«Փրփրած ու կատաղի ծովի ջուրն էլ ամբողջ
Չի կարող սրբել մյուռոնը՝ ի վերուստ օծված թագավորի»:[32]

Ինչպիսի տողեր: Բայց կարո՞ղ են դրանցում արտահայտված գաղափարներն ավելի հասարակ և ավելի կեղծ լինել: Տեսնում ենք, որ գաղափարի աղքատությունը հազիվ թե ազդում է բառային նախշի գեղեցկության վրա: Մյուս կողմից, աշխատանքի համար մաթեմատիկոսը գաղափարներից բացի ուրիշ նյութ չունի, այդ պատճառով էլ նրա ստեղծած պատկերներն ավելի մեծ հավանականությամբ կշարունակեն իրենց գոյությունը, քանի որ ժամանակի ընթացքում գաղափարներն ավելի քիչ են մաշվում, քան բառերը:

Մաթեմատիկոսի ստեղծած պատկերները, նկարչի կամ բանաստեղծի պատկերների նման, պետք է գեղեցիկ լինեն. գույների կամ բառերի նման, գաղափարները պետք է համահունչ զուգորդվեն: Գեղեցկությունն առաջին չափորոշիչն է. աշխարհում տգեղ մաթեմատիկա չկա: Այս առումով չեմ կարող չնշել դեռևս լայն տարածում ունեցող մի մոլորություն (չնայած, հավանական է, որ հիմա այն ավելի քիչ է տարածված, քան առաջ): Նկատի ունեմ այն, ինչը Ուայթհեդն անվանել է «գրական նախապաշարմունք». սերը մաթեմատիկայի նկատմամբ և նրա գեղագիտական գնահատումը «յուրաքանչյուր սերնդի մի քանի էքսցենտրիկների մենաշնորհն է»:

Մեր ժամանակներում դժվար է կրթված մարդ գտնել, որ բոլորովին անտարբեր է մաթեմատիկայի գեղագիտական հմայքի նկատմամբ: Հնարավոր է, որ մաթեմատիկական գեղեցկությունը որոշելը շատ դժվար է, բայց նույնը կարելի է ասել ցանկացած այլ տեսակի գեղեցկության մասին. բացարձակ ճշգրտությամբ չգիտենք, թե ինչ են ենթադրում գեղեցիկ պոեմ ասելով, բայց դա չի խանգարում որ կարդալու

[32] Շեքսպիրի «Ռիչարդ II»-ից տողերը անգլերենից թարգմանել է Յուրա Գանջալյանը:

ընթացքում ճանաչենք այն: Նույնիսկ պրոֆեսոր Հոգբենը, որ ամեն կերպ ձգտում է նվազեցնել գեղագիտական տարրի կարևորությունը մաթեմատիկայում, չի համարձակվում ժխտել դրա գոյությունը: «Իհարկե, կլինեն մարդիկ, ում համար մաթեմատիկան վերացական սառը գրավչություն ունի... Մաթեմատիկայի գեղագիտական գրավչությունը քիչ թվով ընտրյալ մարդկանց համար կարող է լրիվ իրական լինել»: Բայց նա ենթադրում է, որ այդպիսիք քիչ են, և նրանց զգացմունքները սառն են (դրանք իսկապես շատ զարմանալի մարդիկ են, ովքեր ապրում են համալսարանական փոքրիկ քաղաքներում, որոնց պատերի ետևում թաքնվում են լայն բաց տարածություններում փչող թարմ քամիներից): Այստեղ պրոֆեսոր Հոգբենը միայն կրկնում է Ուայթհեդի «գրական նախապաշարումը»:

Իսկ փաստն այն է, որ քիչ թվով առարկաներ կան, որոնք մաթեմատիկայից ավելի «ճանաչված» են: Մարդկանց մեծ մասն ունակ է բավականություն ստանալու մաթեմատիկայից այնպես, ինչպես մարդկանց մեծ մասն ունակ է հաճույք ստանալու հաճելի երաժշտությունից: Եվ հավանաբար, մարդկանց մեծ մասն իսկապես ավելի շատ հետաքրքրվում է մաթեմատիկայով, քան երաժշտությամբ: Առաջին հայացքից պատկերը կարող է այլ թվալ, բայց դրան բացատրություն գտնելը հեշտ է: Երաժշտությունը կարելի է օգտագործել մասսայական էմոցիաներ առաջացնելու համար, մաթեմատիկան այդ գործին հարմար չէ. երաժշտական կարողությունների բացակայությունն ընկալվում է (անկասկած, իրավացիորեն) որպես տվյալ անձը ինչ-որ չափով վարկաբեկող, մինչդեռ մարդկանց մեծ մասն այնպես է վախենում հենց մաթեմատիկա անունից, որ նրանք պատրաստ են չափազանցնել մաթեմատիկայի հանդեպ իրենց անկարողությունը:

«Գրական նախապաշարմունքի» անհեթեթությունը հասկանալու համար խորը մտորումների կարիք չկա: Յուրաքանչյուր քաղաքակիրթ երկրում հսկայական թվով շախմատ խաղացողներ կան, Ռուսաստանում շախմատ խաղում է համարյա ամբողջ չափահաս բնակչությունը, և համարյա ամեն մի շախմատասեր կարող է ճանաչել «գեղեցիկ» շախմատային պարտիան կամ խնդիրը: Այնինչ շախմատային խնդիրը զուտ մաթեմատիկական վարժություն է (շախմատային պարտիան՝ ոչ ամբողջովին, քանի որ հոգեբանությունն էլ դեր ունի), և յուրաքանչյուրը, ով շախմատային խնդիրը «գեղեցիկ» է համարում, ծափահարում է մաթեմատիկական գեղեցկությանը, նույնիսկ եթե խոսքը համեմատաբար ցածր կարգի գեղեցկության մասին է: Շախմատային խնդիրները ձոն են մաթեմատիկային:

Նույն դասը ավելի ցածր մակարդակի, բայց ավելի լայն հասարակության համար կարող ենք ստանալ բրիջ խաղից, կամ, եթե ավելի ներքև իջնենք, զանգվածային թերթերի այն սյունակներից, որտեղ գլուխկոտրուկներ են հրապարակվում: Այս խաղերի և զվարճությունների համարյա ողջ արտասովոր ժողովրդականությունը տուրք է ռուդիմենտար մաթեմատիկայի ձգողական ուժին, և զլուխկոտրուկների լավագույն կազմողները, ինչպիսիք են Դյուդենին կամ «Կալիբանը», գործնականում տարրական մաթեմատիկայից բացի ուրիշ բան չեն օգտագործում: Նրանք իրենց գործը գիտեն. այն ինչը պետք է լայն հասարակությանը, թեթև մտավոր «ցնցումն» է, իսկ ոչինչ չի կարող համեմատվել այն ցնցումի հետ, որը մտքին տալիս է մաթեմատիկան:

Կարող եմ ավելացնել, որ աշխարհում ոչինչ ավելի մեծ բավականություն չի պատճառում նույնիսկ հայտնի մարդկանց (թվում և նրանց, ովքեր իրենց թույլ են տվել մաթեմատիկայի մասին թերհավատորեն արտահայտվել), քան իսկական մաթեմատիկական թեորեմի բացահայտումը կամ վերաբացահայտումը: Հերբերտ Սպենսերն իր ինքնակենսագրականում հրապարակել է շրջանագծերի մասին վերահայտնագործած թեորեմը, որ ինքն ապացուցել է, երբ քսան տարեկան է եղել (առանց իմանալու, որ Պլատոնը այն ապացուցել էր երկու հազար տարի առաջ): Ավելի թարմ և ավելի զարմանալի օրինակ է պրոֆեսոր Սեդին (բայց նրա թեորեմը իսկապես իրեն է պատկանում):

«Իսկական» մաթեմատիկական թեորեմներ

Շախմատային խնդիրը իսկական մաթեմատիկա է, բայց ինչ-որ իմաստով դա «պարզագույն» մաթեմատիկա է: Որքան էլ քայլերը նուրբ, յուրօրինակ և զարմանալի լինեն, ինչ-որ էական բան այնուամենայնիվ պակասում է: Շախմատային խնդիրները կարևոր չեն: Իսկական մաթեմատիկան լուրջ է ու գեղեցիկ, եթե կուզեք՝ «կարևոր», բայց այս բառը բազմիմաստ է, և «լուրջ» բառը ավելի լավ է արտահայտում այն, ինչ ցանկանում եմ ասել:

Նկատի չունեմ մաթեմատիկայի «գործնական» հետևանքները: Այս հարցին դեռ կանդրադառնամ հետագայում, իսկ հիմա միայն ասեմ՝ եթե շախմատային խնդիրը, կոպիտ ասած, «անօգուտ» է, լավագույն մաթեմատիկայի մասին էլ հիմնականում կարելի է նույնը ասել, և մաթեմատիկայի միայն չնչին մասն է օգտակար, և մաթեմատիկայի այդ չնչին մասն էլ համեմատաբար անհետաքրքիր է: Մաթեմատիկական թեորեմի «լրջությունը» նրա կիրառական հետևանքը չէ (սովորաբար դա աննշան է), այլ մաթեմատիկական այն գաղափարների նշանակալիությունը, որոնց միջև թեորեմը կապ է հաստատում: Առանց մանրուքների մեջ մտնելու, կարելի է ասել, որ մաթեմատիկական գաղափարը «նշանակալի» է, եթե այն կարելի է պարզ և բնական կերպով կապել մաթեմատիկական այլ գաղափարների լայն համակարգի հետ: Այսպիսով, լուրջ մաթեմատիկական թեորեմն այն թեորեմն է, որը կապում է «նշանակալի» գաղափարներ, ամենայն հավանականությամբ հանգեցնում է էական առաջխաղացումների բուն մաթեմատիկայի և նույնիսկ այլ գիտությունների մեջ: Գիտական մտքի զարգացման վրա շախմատային ոչ մի խնդիր ազդեցություն չի թողել. Պյութագորասը, Նյուտոնը, Էյնշտեյնը, յուրաքանչյուրը՝ իր ժամանակին, փոխել են գիտական մտքի ուղղությունը:

Հասկանալի է, որ թեորեմի լրջությունը նրա հետևանքներով չի որոշվում. հետևանքները միայն վկայում են նրա լրջության մասին: Շեքսպիրը հսկայական ազդեցություն է թողել անգլերենի զարգացման վրա, Օթուեյը[33]՝ համարյա բոլորովին, բայց Շեքսպիրը ավելի լավ բանաստեղծ էր ուրիշ պատճառով: Նա լավագույն բանաստեղծն էր, որովհետև նրա պոեզիան էր շատ ավելի լավը: Շախմատային խնդրի անկարևորությունը, Օթուեյի պոեզիայի նման, ոչ թե նրա հետևանքներից է, այլ բովանդակությունից:

Մի հարց էլ կա, որին շատ կարճ կանդրադառնամ ոչ այն պատճառով, որ անհետաքրքիր է, այլ որովհետև բարդ է, և համապատասխան որակավորում չունեմ, որ գեղագիտական լուրջ քննարկում վարեմ: Մաթեմատիկական թեորեմի գեղեցկությունը մեծ մասամբ կախված է նրա լրջությունից. նույնիսկ պոզիայում տողի գեղեցկությունը ինչ-որ չափով կարող է կախված լինել ներդրված գաղափարներից: Վերևում շեքսպիրյան երկու տող էլ մեջբերել՝ որպես բառային նկարի իսկական օրինակ, բայց «Կյանքի տենդահույզ տագնապից հետո ննջում է անդորր» տողն ինձ ավելի գեղեցիկ է թվում: Պատկերը նույնքան գեղեցիկ է, բայց այս դեպքում գաղափարները իմաստալից են, պնդումը՝ առողջ, այդ իսկ պատճառով տողը մեր ավելի խոր զգացմունքներին է հասնում: Գաղափարները պատկերի վրա էական ազդեցություն են ունենում պոեզիայում էլ, և, բնական է, ավելի մեծ չափով՝ մաթեմատիկայում, բայց ես նույնիսկ չեմ փորձի այս հարցը ավելի լուրջ քննարկել:

Պարզ է դառնում, որ հետագա շարադրանքի համար պետք է «իսկական» մաթեմատիկական թեորեմների օրինակներ բերեմ. այնպիսի թեորեմների, որոնք ցանկացած մաթեմատիկոս առաջնակարգ կհամարի: Եվ այստեղ շատ դժվար դրության մեջ եմ հայտնվում այն սահմանափակումների պատճառով, որոնցում գրում եմ: Մի կողմից՝ իմ օրինակները շատ պարզ և մաթեմատիկական հատուկ գիտելիք չունեցող ընթերցողին հասկանալի պիտի է լինեն. չպետք է լինեն նախնական բարդ բացատրություններ, և ընթերցողը պետք է կարողանա հետևել ինչպես թեորեմի ապացույցին, այնպես էլ ձևակերպմանը: Այս պայմանները բացառում են, օրինակ, թվերի տեսության շատ գեղեցիկ թեորեմներ, ինչպես երկու

[33] Թոմաս Օթուեյ (Otway) 1651-1685, անգլիացի պոետ, դրամատուրգ:

քառակուսու մասին Ֆերմայի թեորեմը կամ քառակուսային կախվածության օրենքը: Մյուս կողմից՝ իմ օրինակները պետք է «առաջնակարգ» մաթեմատիկայից լինեն, ակտիվ աշխատող մասնագետ մաթեմատիկոսի մաթեմատիկայից, և այս պայմանը բացառում է շատ բան, ինչը կարելի էր հասանելի դարձնել ընթերցողների լայն շրջանակին, բայց ինչը դուրս է տրամաբանությունից և մաթեմատիկայի փիլիսոփայությունից:

Դժվար լինի այս իրավիճակից դուրս գալու ավելի լավ ելք, քան հին հույների մաթեմատիկային դիմելը: Կձևակերպեմ և կապացուցեմ հին հունական մաթեմատիկայի երկու հայտնի թեորեմ: Այս երկու թեորեմն էլ պատկանում են «պարզերի» շարքին՝ ինչպես գաղափարով, այնպես էլ իրականացմամբ, բայց, անկասկած, նույնիսկ այս պարագայում երկուսն էլ բարձրագույն կարգի թեորեմներ են: Դրանցից յուրաքանչյուրը նույնքան թարմ և կարևոր է, ինչպես իր բացահայտման ժամանակ: Անցած երկու հազար տարին նրանց երեսին ոչ մի կնճիռ չի ավելացրել: Վերջապես, մտավորականը, որքան էլ աղքատ լինեն նրա մաթեմատիկական գիտելիքները, ընդամենը մեկ ժամվա ընթացքում կարող է հաղթահարել և՛ ձևակերպումը, և՛ ապացույցը:

1. Առաջին օրինակը Էվկլիդեսի առաջարկած ապացույցն է, որ գոյություն ունեն անվերջ շատ պարզ թվեր:

Պարզ են կոչվում այն թվերը, որոնք հնարավոր չէ վերածել ավելի փոքր արտադրիչների՝ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, ..., (1): Օրինակ, 37-ն ու 317-ը պարզ են: Հենց պարզ թվերն են այն նյութը, որից բազմապատկելու միջոցով կազմվում են բոլոր թվերը. օրինակ, $666 = 2\cdot3\cdot3\cdot37$: Ցանկացած թիվ, որը պարզ չէ, բաժանվում է գոնե մեկ պարզ թվի (հասկանալի է, որ կարող է բաժանվել է մի քանի պարզ թվերի): Պահաջվում է ապացուցել, որ անվերջ թվով պարզ թվեր կան, այսինքն՝ (1) հաջորդականությունը երբեք չի վերջանում:

Ենթադրենք, որ A) հաջորդականությունը վերջանում է, այսինքն՝ 2, 3, 5, . . ., P նրան պատկանող բոլոր թվերն են (այսպիսով, P-ն ամենամեծ պարզ թիվն է): Հետևելով այդ վարկածին՝ դիտարկենք հետևյալ թիվը.

$Q=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot P+1$:

Պարզ է, որ Q թիվը չի բաժանվում 2, 3, 5, . . ., P թվերից ոչ մեկին, քանի որ դրանցից յուրաքանչյուրի վրա բաժանելիս կմնա 1 մնացորդ: Բայց, եթե Q թիվը պարզ չէ, պետք է որևէ պարզ թվի բաժանվի: Հետևաբար, գոյություն ունի այնպիսի պարզ թիվ (հնարավոր է հենց Q թիվը), որը ավելի մեծ է, քան 2, 3, 5,... , P թվերից յուրաքանչյուրը: Սա հակասում է մեր ենթադրությանը, թե գոյություն չունի P թվից ավելի մեծ պարզ թիվ. հետևաբար մեր ենթադրությունը սխալ է:

Ապացուցման reductio ad absurdum (հակասումով ապացույց) մեթոդը, որը շատ սիրում էր Էվկլիդեսը, մաթեմատիկոսների սիրած գործիքներից է: Սա ավելի «խորամանկ» գամբիտ է, քան շախմատային ցանկացած գամբիտ. շախմատիստը կարող է զինվոր կամ նույնիսկ ֆիգուր զոհաբերել, իսկ մաթեմատիկոսը զոհաբերում է ամբողջ պարտիան:

2. Երկրորդ օրինակը Պյութագորասի առաջարկած ապացույցն է, որ $\sqrt{2}$ թիվը իռացիոնալ է:

Ռացիոնալ թվերը ներկայացվում են a/b կոտորակի տեսքով, որտեղ a և b թվերը ամբողջ թվեր են: Կարելի է համարել, որ a և b թվերը ընդհանուր բաժանարար չունեն, քանի որ եթե ունենային, ապա կոտորակը կարելի էր կրճատել նրանց ընդհանուր բաժանարարով: «$\sqrt{2}$ թիվը իռացիոնալ է» պնդումը համարժեք է «2 թիվը հնարավոր չէ ներկայացնել $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ տեսքով» պնդմանը, իսկ դա էլ իր հերթին համարժեք է այն պնդմանը, որ $a^2=2b^2$ (2) հավասարմանը չեն կարող բավարարել ընդհանուր բաժանարար չունեցող a և b ամբողջ թվեր:

Զուտ թվաբանական այս թեորեմը չի պահանջում իմանալ «իռացոնալ թվերը» և կախված չէ իռացիոնալ թվերի ոչ մի տեսությունից:

Նորից օգտվենք հակասմամբ ապացուցելու եղանակից: Ենթադրենք, որ (2) առնչությունը տեղի ունի, և a-ն ու b-ն ընդհանուր բաժանարար չունեցող ամբողջ թվեր են: (2) առնչությունից հետևում է, որ a^2 թիվը զույգ է (քանի որ $2b^2$-ն բաժանվում է 2-ի), և հետևաբար, a թիվը զույգ է (քանի որ կենտ թվի քառակուսին կենտ թիվ է): Եթե a-ն զույգ է, ապա a=2c (3), որտեղ c-ն ամբողջ թիվ է, և, հետևաբար, $2b^2=a^2=(2c)^2=4c^2$, կամ $b^2=2c^2$ (4):

Հետևաբար b^2 թիվը զույգ է, իսկ դա էլ նշանակում է (նույն պատճառով, ինչ առաջ), որ b թիվը զույգ է: Այսպիսով, a և b թվերը երկուսն էլ զույգ են, և այդ պատճառով էլ ունեն ընդհանուր բաժանարար՝ 2, ինչը հակասում է մեր սկզբնական ենթադրությանը: Հետևաբար, մեր սկզբնական ենթադրությունը սխալ է:

Պյութագորասի թեորեմից հետևում է, որ քառակուսու անկյունագիծը համաչափելի չէ իր կողմի հետ (որ նրանց հարաբերությունը ռացիոնալ թիվ չէ, որ գոյություն չունի երկարության այնպիսի միավոր, որի ամբողջ բազմապատիկները լինեն և՛ անկյունագիծը, և՛ կողմը):

Իսկապես, եթե կողմը ընտրենք որպես երկարության միավոր և անկյունագծի երկարությունը նշանակենք d, ապա Պյութագորասի էլի մի հայտնի թեորեմի համաձայն $d^2=1^2+1^2=2$, այդ պատճառով էլ d-ն չի կարող ռացիոնալ թիվ լինել:

Կարող եմ թվերի տեսությունից էլի շատ գեղեցիկ թեորեմներ ներկայացնել, որոնց իմաստը հասկանալի լինի ցանկացած մարդու: Օրինակ, «թվաբանության հիմնական թեորեմ» անունով հայտնի պնդումն ասում է՝ ցանկացած ամբողջ թիվ կարող է վերլուծվել պարզ թվերի արտադրյալի, ընդ որում միակ (արտադրիչների հերթականության ճշտությամբ) ձևով: Օրինակ, 666=2•3•3•37, և ուրիշ վերլուծումներ գոյություն չունեն. 666=2•11•29, կամ 13•89=17•73 անհնար են (դրանում կարող ենք համոզվել առանց բազմապատկումները կատարելու): Այս թեորեմը, դա է վկայում նրա անվանումը, բարձրագույն թվաբանության հիմքն է, բայց նրա ապացույցը, չնայած «բարդ» չէ, պահանջում է որոշակի նախնական պարզաբանումներ և ոչ մաթեմատիկոս ընթերցողի համար կարող է ձանձրալի լինել:

Հայտնի և գեղեցիկ թեորեմի էլի մեկ օրինակ կարող է ծառայել Ֆերմայի թեորեմը երկու քառակուսիների մասին: Պարզ թվերը (եթե բացառենք 2 հատուկ պարզ թիվը) կարելի բաժանել երկու դասի՝

պարզ թվեր՝ 5, 13, 17, 29, 37, 41 …, որոնք 4-ի բաժանելիս տալիս են մեկ մնացորդ,

և պարզ թվեր՝ 3, 7, 11, 19, 23, 31,... , որոնք 4-ի բաժանելիս տալիս են 3 մնացորդ:

Առաջին դասի բոլոր պարզ թվերը կարելի ներկայացնել երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով.

$5 = 1^2+2^2$, $13 = 2^2+3^2$,
$17=1^2+4^2$, $29 = 2^2+5^2$:

Երկրորդ դասի թվերից ոչ մեկը երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով հնարավոր չէ ներկայացնել (ընթերցողը կարող է հեշտությամբ համոզվել ստուգելու միջոցով): Այս պնդումը Ֆերմայի թեորեմն է, որը միանգամայն հիմնավոր կերպով ընդունված է թվերի տեսության գեղեցկագույն թեորեմներից մեկը համարել: Ցավոք, գոյություն չունի դրա՝ մաթեմատիկոս-մասնագետից բացի ուրիշ մեկին հասանելի ապացույց:

Գեղեցիկ թեորեմներ կան նաև բազմությունների տեսության մեջ, օրինակ, Կանտորի թեորեմը՝ կոնտինուումի ոչ հաշվելի լինելու մասին: Այստեղ դժվարությունը ճիշտ հակառակն է: Թեորեմի ապացույցը բավականին պարզ է, եթե տիրապետում եք բազմությունների տեսության տերմինալոգիային, բայց մինչև թեորեմի իմաստի հասկանալի դառնալը լայն պարզաբանումներ են անհրաժեշտ: Այդ պատճառով էլ նոր օրինակներ չեմ բերի: Վերը բերված օրինակները յուրօրինակ թեստեր են, և դրանք ըստ արժանավույն գնահատել չկարողացող ընթերցողը դժվար թե մաթեմատիկայում ընդհանրապես ինչ-որ բան կարողանա գնահատել:

Ինչպես արդեն ասվեց, մաթեմատիկոսը պատկերները կազմում է գաղափարներից, իսկ գեղեցկությունը և լրջությունը այն չափանիշներն են, որոնց միջոցով կարելի է դատել ստեղծված պատկերների մասին: Դժվարությամբ կհավատամ, թե ով բերված երկու թեորեմները հասկացել է, կարող է վիճել այն մասին, որ դրանք բավարարում են գեղեցկության և լրջության չափանիշներին: Եթե դրանք Դյուդենիի ամենասրամիտ գլուխկոտրուկների կամ իր բնագավառի վարպետի ստեղծած շախմատային լավագույն խնդիրների հետ համեմատենք, ապա թեորեմների՝ և՛ գեղեցկության, և՛ լրջության առումով գերազանցությունը պարզ կլինի. երևում է որակի ակնհայտ տարբերություն: Թեորեմներն ավելի լուրջ են, ինչպես նաև՝ շատ ավելի գեղեցիկ: Կարելի՞ է ավելի մանրամասն որոշել, թե որն է թեորեմների առավելությունը:

Ամենից առաջ մաթեմատիկական թեորեմների ակնհայտ և ճնշող առավելությունը լրջությունն է: Շախմատային խնդիրը հիմքում իրարից այնքան էլ չտարբերվող և արտաքին հետևանքներ չունեցող սրամիտ գաղափարների շատ սահմանափակ համախմբի արդյունք է: Մենք էլի նույն ձևով կմտածեինք, եթե անգամ շախմատը հայտնագործված չլիներ, մինչդեռ Էվկլիդեսի և Պյութագորասի թեորեմները խորը ազդեցություն են թողել մարդկային մտածողության վրա նույնիսկ մաթեմատիկայի սահմաններից դուրս:

Այսպիսով, Էվկլիդեսի թեորեմը կարևոր կենսական նշանակություն ունի թվաբանության ողջ կառույցի համար: Պարզ թվերն այն հում նյութն են, որից պետք է կառուցենք ամբողջ թվաբանությունը, և Էվկլիդեսի թեորեմը մեզ համոզում է, որ այդ խնդիրը լուծելու համար բավարար քանակությամբ հում նյութ ունենք: Բայց Պյութագորասի թեորեմը կիրառման ավելի լայն դաշտ ունի և ավելի հաճելի ձևակերպում:

Պետք է նշել, որ Պյութագորասի առաջարկած ապացույցը հեռահար ընդհանրացումներ ունի և հիմնական սկզբունքի փոքր փոփոխությունից հետո կարող է կիրառվել «իռացիոնալ թվերի» շատ լայն դասի համար:

Պյութագորասի ապացույցի նմանությամբ կարող ենք ապացուցել (ինչպես, հավանաբար, դա արել է Թեետետոսը[34]), որ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}$ թվերն իռացիոնալ են, կամ (Թեետետոսի ապացույցի շրջանակից էլ դուրս) որ $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{17}$ թվերն իռացիոնալ են:

[34] Թեետետոս Աթենացի (Theaetetus) 410-368թ. Ք.ա. - հին հույն մաթեմատիկոս:

Էվկլիդեսի թեորեմն ասում է, որ ամբողջ թվերի ոչ հակասական թվաբանությունը կառուցելու համար մեր տրամադրության տակ բավարար քանակությամբ նյութի պաշար ունենք: Պյութագորասի թեորեմը և նրա ընդհանրացումները խոսում են այն մասին, որ երբ կառուցենք ամբողջ թվերի թվաբանությունը, այն մեր նպատակների համար բավարար չի լինի, քանի որ մեր ուշադրությունը գրավող շատ մեծություններ կան, որոնք ամբողջ թվերով չենք կարող չափել: Քառակուսու անկյունագիծը միայն ակնհայտ օրինակ է: Հին հույն մաթեմատիկոսներն այս հայտնագործության խորը իմաստն անմիջապես գիտակցեցին: Սկզբում նրանք համարում էին (իմ կարծիքով, ըստ «առողջ մտքի» «բնական» պահանջների), որ նույն սեռի բոլոր մեծությունները համաչափելի են, օրինակ, որ երկարության ցանկացած երկու մեծություն բազմապատիկ է երկարության նույն միավորին, և այս ենթադրությունից ելնելով՝ կառուցեցին հարաբերությունների տեսությունը: Պյութագորասի հայտնագործությունը ցույց տվեց, որ այդ ենթադրությունը ճիշտ չէր, և հանգեցրեց Եվդոքսի[35]ավելի խորը տեսությունը կառուցելուն՝ շարադրված Էվկլիդեսի «Սկզբունքներ» գրքի V հատորում: Եվդոքսի տեսությունը մեր ժամանակներում շատ մաթեմատիկոսներ հինհունական մաթեմատիկայի լավագույն ձեռքբերումներից են համարում: Այս տեսությունն իր ոգով զարմանալիորեն արդիական է և կարող է դիտարկվել որպես իռացիոնալ թվերի ժամանակակից տեսության ներածություն, ինչը հեղափոխություն արեց մաթեմատիկական անալիզում և ուժեղ ազդեցություն թողեց նորագույն ժամանակների փիլիսոփայության վրա:

Այսպիսով, թեորեմների «լրջության» վերաբերյալ ոչ մի կասկած չկա, ուստի ավելի լավ է նշենք, որ այդ թեորեմներից ոչ մեկը «գործնական» որևէ կիրառություն չունի: Գործնական կիրառության մեջ մեզ հետաքրքրում են միայն համեմատաբար փոքր թվերը: Միայն աստղագիտությունն ու ատոմային ֆիզիկան են աշխատում «մեծ» թվերի հետ, բայց այդ գիտություններն էլ, գոնե հիմա, հազիվ թե ավելի մեծ գործնական նշանակություն ունեն, քան մաքուր վերացարկված մաթեմատիկան: Չգիտեմ, թե ինչ ամենամեծ ճշգրտություն է անհրաժեշտ ճարտարագետին: Շռայլ լինենք և համարենք, որ խոսքը ստորակետից հետո տասը թվանշանի մասին է: Այդ դեպքում 3,14159265 թիվը (թվի արժեքը ստորակետից հետո 8 նշի ճշտությամբ) կարելի է ներկայացնել

$$\frac{314159265}{1000000000}$$

հարաբերության տեսքով, համապատասխանաբար, ինը նիշանոց, տասը նիշանոց:

[35]Եվդոքս Կնիդոսցի (Eudoxus) 408-355թ. Ք.ա. հիմ հույն մաթեմատիկոս, աստղագետ, մեխանիկ

1000000000-ը չգերազանող պարզ թվերի քանակը 50847478 է: Սա բավական է ճարտարագետի համար, և նա կարող է երջանիկ զգալ առանց մնացածի: Էվկլիդեսի թեորեմի մասին ասվածը բավարար է: Ինչ վերաբերում է Պյութագորասի թեորեմին, ապա պարզ է, որ ճարտարագետի համար իռացիոնալ թվերն ընդհանրապես հետաքրքրություն չեն ներկայացնում, քանի որ միշտ գործ ունի մեծությունների մոտավոր արժեքների հետ, իսկ բոլոր մոտավոր արժեքները ռացիոնալ են:

«Լուրջ» թեորեմ

«Լուրջ» թեորեմ ասելով՝ ընդունված է հասկանալ «արժեքավոր» գաղափար պարունակողը: Ինձ թվում է՝ պետք է փորձենք ավելի մանրամասն վերլուծել այն հատկությունները, որոնք մաթեմատիկական գաղափարը դարձնում են արժեքավոր: Դա անելը շատ դժվար է, և քիչ հավանական է, որ իմ արած վերլուծությունը շատ արժեքավոր լինի: «Արժեքավոր» գաղափարի հանդիպելիս այն ճանաչում ենք, ինչպես ճանաչեցին արժեքավոր գաղափարները Էվկլիդեսի և Պյութագորասի վերոհիշյալ թեորեմներում, բայց կարևորը ճանաչելու կարողությունը շատ բարձր կարգի մաթեմատիկական իմաստություն և մաթեմատիկական գաղափարների իմացություն է պահանջում, ինչը ձեռք է բերվում միայն դրանց շրջանում երկար լինելու արդյունքում: Այդ պատճառով կփորձեմ մաթեմատիկական գաղափարի «լրջությունը» ինչ-որ չափով վերլուծել և վերլուծությունը, որքան հնարավոր է, խելամիտ և հասկանալի դարձնել, չնայած իր ողջ անհամազորությանը: Էական դեր ունի երկու հատկություն՝ գաղափարի ընդհանրությունը և խորությունը, բայց դրանցից ոչ մեկը հեշտ և հասարակ չի սահմանվում:

Կարևոր մաթեմատիկական գաղափարը, մաթեմատիկական լուրջ թեորեմը ինչ-որ իմաստով պետք «ընդհանրություն» ունենա: Գաղափարը պետք է տարբեր տեսակի շատ թեորեմներ ապացուցելու համար օգտագործվող մաթեմատիկական շատ կառույցների բաղկացուցիչ լինի: Թեորեմը պետք է այնպիսին լինի, որ նույնիսկ եթե սկզբում մասնավոր տեսքով է ձևակերպվել (ինչպես Պյութագորասի թեորեմը), էական ընդհանրացումներ թույլ տա և տիպական լինի նման թեորեմների ամբողջ դասի համար: Դրա ապացուցման ժամանակ բացահայտվող հարաբերությունները պետք է տարբեր մաթեմատիկական գաղափարներ կապեն իրար: Այս ամենը շատ աղոտ է և բազմաթիվ ճշգրտումներ է պահանջում: Բայց, ինչպես դժվար չէ նկատելը, թեորեմը դժվար թե հավակնի լուրջ լինելու, եթե նրա այս հատկություններն ակնհայտորեն բացակայում են: Մնում է առանձին կուրիոզների օրինակներ բերել, որոնք շատ են հանդիպում թվաբանության մեջ: Ռոուզ Բոլի և Կոկսետերի

«Մաթեմատիկական էսեներ և զվարճալիքներ» գրքից համարյա պատահաբար փոխ վերցրած երկու օրինակ բերեմ:

ա) բացի 8712 և 9801 թվերից, ուրիշ քառանիշ թիվ չկա, որը հավասար լինի նույն թվանշաններով, բայց հակառակ դասավորությամբ գրված թվի բազմապատիկին.

8712 = 4•2178, 9801 = 9•1089.

Այս հատկությունը ունեցող և 10000-ը չգերազնացող ուրիշ թիվ չկա:

բ) Միայն չորս թիվ գոյություն ունի (1-ից բացի), որ հավասար լինի իր թվանշանների խորանարդների գումարին, օրինակ

$153 = 1^3 + 5^3+3^3$, $370 = 3^3 + 7^3+0^3$,

$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$, $407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$:

Այս բոլորը հետաքրքիր փաստեր են՝ հարմար թերթերի գլուխկոտրուկներով սյունակների համար, որոնք կարող են զբաղեցնել սիրողներին, բայց մաթեմատիկոսի սիրտը դրանց չի կպչի: Դրանց ապացույցները ո՛չ դժվար, ո՛չ էլ հետաքրքիր, ընդամենը մի քիչ տաղտկալի են: Համապատասխան պնդումներն էլ, ինչպես թեորեմներ, լուրջ չեն: Պարզ է, որ պատճառներից մեկը (թերևս, ոչ ամենակարևորը) դրանց ինչպես ձևակերպման, այնպես էլ ապացույցի որևէ ընդհանրացում թույլ չտվող չափազանց կոնկրետությունն է:

«Ընդհանրությունը» բազմիմաստ և շատ վտանգավոր բառ է, և պետք է ուշադիր հետևենք, որ շատ չհանդիպի մեր դատողություններում: Այն օգտագործվում է տարբեր իմաստներով և՛ մաթեմատիկայի, և՛ մաթեմատիկայի մասին գրականության մեջ, և ընդհանրության ընկալման մի իմաստի վրա տրամաբանները հատուկ շեշտադրում են անում, չնայած մեզ համար տրամաբանների այդպիսի ընկալումն այստեղ բոլորովին տեղին չէ: Այդ իմաստով, դժվար չէ ապացուցել, մաթեմատիկական բոլոր թեորեմները միանման և ամբողջական «ընդհանրություն» ունեն:

«Մաթեմատիկայի որոշակիությունը,- ասում է Ուայթհեդը,- կախված է նրա բացարձակ վերացարկված ընդհանրությունից»: Երբ պնդում ենք, որ 2+3=5, խոսում ենք «առարկաների» երեք խմբի միջև եղած առնչության մասին, և այդ «առարկաները» խնձորներ, դրամներ կամ այլ տեսակի կոնկրետ առարկաներ չեն, այլ ուղղակի «առարկաներ», «ցանկացած տեսակի առարկաներ»: Պնդման իմաստը բոլորովին կախված չէ խմբերի առանձին անդամներից: Մաթեմատիկական բոլոր «օբյեկտները», «իմաստները» կամ «հարաբերությունները», ինչպիսիք են «2», «3», «5» կամ «=», և մաթեմատիկական բոլոր նախադասությունները, որոնցում դրանք մասնակցում են, բացարձակ ընդհանուր բնույթ ունեն այն իմաստով, որ դրանք բացարձակապես վերացարկված են: Ուայթհեդի պնդման մեջ բառերից մեկն ավելորդ է, քանի որ այս իմաստով ընդհանրությունը հենց վերացարկվածությունն է:

«Ընդհանրություն» բառի այս իմաստը կարևոր է, և տրամաբանները լրիվ արդարացի են՝
ընդգծելով այն, քանի որ այն իր մեջ տափակություն է պարունակում, որի մասին շատերը, ովքեր պետք է այդ հարցում ավելի լավ գլուխ հանեին, հակված են մոռանալու: Օրինակ՝ հաճախ կարելի է լսել, թե ինչպես որևէ աստղագետ կամ ֆիզիկոս հայտարարում է, որ իրեն հաջողվել է գտնել այն բանի «մաթեմատիկական ապացույցը», որ ֆիզիկական տիեզերքը պետք է այս կերպ, այլ ոչ թե ուրիշ կերպ դրսևորվի: Այդպիսի բոլոր հայտարարությունները, եթե բառացի մեկնաբանենք, բացարձակ անհեթեթ են: Հնարավոր չէ մաթեմատիկորեն ապացուցել, որ վաղը արևի կամ լուսնի խավարում կլինի, որովհետև խավարումները և մյուս ֆիզիկական երևույթները որպես բաղադրիչներ չեն տեղավորվում մաթեմատիկայի վերացարկված աշխարհում: Համոզված եմ, որ բոլոր աստղագետներն ստիպված կլինեին ընդունել այս պնդման ճշմարտացիությունը, քանի խավարում էլ, որ կանխատեսած լինեն մինչ այդ:

Պարզ է, որ հիմա մեզ այլ տեսակի «ընդհանրություն» է հետաքրքրում: Մենք տարբերություններ ենք փնտրում ընդհանրությունների մեջ. բոլոր մաթեմատիկական թեորեմները Ուայթհեդի իմաստով ունեն միատեսակ ընդհանրություն: Այսպիսով § 15-ում բերված ա) և բ) «պարզագույն» թեորեմները նույնքան «վերացական» և «ընդհանուր» են, ինչպես Էվկլիդեսի և Պյութագորասի թեորեմները կամ ցանկացած շախմատային խնդիր: Շախմատային խնդրի համար միևնույն է, թե ինչ գույնի են ֆիգուրները՝ սպիտակ ու սև, թե կարմիր ու կանաչ, և, ընդհանրապես, գոյություն ունե՞ն ֆիզիկական «ֆիգուրներ»: Այս բոլոր դեպքերում գործ ունենք միևնույն խնդրի հետ, որը գիտակը հանգիստ պահում է մտքում, իսկ մենք ստիպված ենք ջանասիրաբար այն վերարտադրել շախմատի տախտակի վրա: Պետք է նշել, որ շախմատի տախտակն ու ֆիգուրները միայն մեր ծույլ երևակայությունը խթանելու միջոց են և խնդրի էության հետ ավելի շատ կապ չունեն, քան կավիճն ու գրատախտակը՝ այն թեորեմների հետ, որ ապացուցում ենք մաթեմատիկայի դասերին:

Խոսքն այն ընդհանրության մասին չէ, որ բնորոշ է մաթեմատիկական բոլոր թեորեմներին, որի փնտրտուքով զբաղված էինք մինչ այժմ: Հիմա մեզ հետաքրքրում է ավելի նուրբ և չերևացող այն ընդհանրությունը, որը փորձեցի ընդհանուր գծերով նկարագրել § 15-ում: Եվ պետք է ուշադիր հետևենք, որ չափից դուրս չշեշտենք նույնիսկ այդպիսի ընդհանրությունը (այդպես անելու սովորություն ունեն տրամաբանները, օրինակ Ուայթհեդը): Սա միայն արդի մաթեմատիկայի կարևոր նվաճումների թվին պատկանող «ընդհանրացումների նրբություններն ընդհանրացնելու նրբությունների վրա բարդելը» չէ: Ընդհանրության որոշակի բաժին պետք է պարունակի բարձր կարգի ցանկացած թեորեմ, բայց չափազանց ընդհանրացումն անխուսափելիորեն կհանգեցնի թեորեմի «դժգունությանը»: «Ամեն ինչ այն է, ինչ կա, և ոչ ուրիշ բան», և առարկաների միջև տարբերությունները պակաս հետաքրքիր չեն, քան նրանց նմանությունները: Մեր ընկերներին ընտրում ենք ոչ այն պատճառով, որ նրանք մարդուն հատուկ բոլոր լավ որակներն ունեն, այլ որովհետև նրանք այն են, ինչ կան: Այդպես է և մաթեմատիկայում. չափից շատ օբյեկտների համար ընդհանուր հատկությունը դժվար թե շատ հետաքրքիր լինի, և մաթեմատիկական գաղափարներն էլ տաղտկալի են դառնում, եթե բավարար անհատականություն չունեն: Այստեղ կարող եմ գոնե Ուայթհեդին մեջբերել, որ տվյալ դեպքում իմ կողմից է. «Արգասաբեր հայեցակարգը լայն ընդհանրացումն է, որը սահմանափակված է հաջող մասնավորեցմամբ»:

Նշանակալի գաղափարից պահանջվող երկրորդ հատկությունը խորությունն է: Դա սահմանելն ավելի դժվար է: Դա ինչ-որ կերպ կապված է դժվարության հետ. «ավելի խորը» գաղափարները սովորաբար ավելի դժվար ըմբռնելի են, բայց դրա հետ մեկտեղ նույն բանը չեն: Պյութագորասի թեորեմի և դրա ընդհանրացումների հիմքում ընկած գաղափարները շատ խորն են, բայց ժամանակակից մաթեմատիկոսը դրանք դժվար չի համարի: Մյուս կողմից, թեորեմը կարող է իր էությամբ մակերեսային լինել, բայց ապացուցման համար շատ դժվար (այդպիսիք են, օրինակ, «դիոֆանտյան»[36] շատ թեորեմներ, այսինքն՝ ամբողջ թվերում հավասարումների լուծումների մասին թեորեմները):

Տպավորություն է ստացվում, որ մաթեմատիկական գաղափարները շերտավորված են, այսինքն՝ շերտերով են դասավորված, մի շերտի գաղափարները միմյանց հետ և իրենցից ներքև և վերև գտնվող շերտերի գաղափարների հետ կապված են բազմաթիվ հարաբերություններով: Որքան ներքև է շերտը, այնքան խոր (և, որպես կանոն, ավելի դժվար) է գաղափարը: Այսպես, «իռացիոնալ թվի» գաղափարն ավելի խորն է, քան ամբողջ թվինը, և այդ պատճառով էլ Պյութագորասի թեորեմն ավելի խորն է, քան Էվկլիդեսինը:

Ուշադրությունը կենտրոնացնենք ամբողջ թվերի կամ որևէ կոնկրետ շերտում ընկած ուրիշ օբյեկտների խմբում եղած հարաբերություններին: Հնարավոր է, որ այդ հարաբերություններից մեկը լրիվ հասկանալի լինի, որ կարողանանք ճանաչել և

---

[36] Դիոֆանտ - մոտ 250թ. հելլենիզմի շրջանի մաթեմատիկոս: Պահպանվել են նրա ստեղծագործություններից երկուսը՝ «Թվաբանություն» և «Բազմանկյուն թվերի մասին»:

ապացուցել, օրինակ, ամբողջ թվերի որևէ հատկություն, առանց իմանալու ավելի ներքևում գտնվող շերտի պարունակության մասին: Այսպես, Էվկլիդեսի թեորեմն ապացուցեցինք՝ դիտարկելով միայն ամբողջ թվերի հատկությունները: Բայց քիչ չեն ամբողջ թվերի մասին այնպիսի թեորեմները, որ չենք կարող արժանի ձևով գնահատել, առավել ևս՝ ապացուցել, եթե ավելի խոր «չփորփրենք» և չպարզենք այն, ինչ տեղի է ունենում ավելի ստորին շերտերում:

Դժվար չէ այդպիսի օրինակներ բերել պարզ թվերի տեսությունից: Էվկլիդեսի թեորեմը շատ կարևոր է, բայց առանձնապես խոր չէ. կարող ենք ապացուցել, որ գոյություն ունեն անվերջ թվով պարզ թվեր՝ չօգտվելով «բաժանելություն» հասկացությունից ավելի խորը որևէ բանից: Բայց հենց իմանում ենք, որ պարզ թվերն անվերջ են, միանգամից նոր հարցեր են առաջանում: Լավ, պարզ թվերն անվերջ են, իսկ ինչպե՞ս են նրանք բաշխված: Ենթադրենք N-ը մի մեծ թիվ է, օրինակ 10^{80} կամ $(10^{10})^{10}$[37]: N-ը չգերազանցող քանի՞ պարզ թիվ կա[38]: Բավական է այս հարցերը տալ, և հայտնվում ենք լրիվ այլ իրավիճակում: Կարող ենք դրանց պատասխանել զարմանալի ճշգրտությամբ, բայց պետք է ավելի խոր փորփրենք՝ ժամանակավորապես մի կողմ թողնելով ամբողջ թվերը, և օգտվենք ֆունկցիաների ժամանակակից տեսության ամենահզոր զենքերից: Այսպիսով, մեր հարցին պատասխանող թեորեմը (այսպես կոչված՝ «պարզ թվերի բաշխման թեորեմը») շատ ավելի խորն է, քան Էվկլիդեսի կամ նույնիսկ Պյութագորասի թեորեմը:

Կարող էի հեշտությամբ էլի օրինակներ բերել, բայց «խորության» հասկացությունը չբռնվող է նաև մաթեմատիկոսի համար, որ կարող է այն ճանաչել, և դժվար թե էլի ինչ-որ բան կարողանամ ասել այս հասկացության մասին, որ օգտակար լինի ոչ մասնագետ ընթերցողին:

Էլի մեկ հարց, որ մնացել է § 11-ից, որտեղ ինձ թույլ տվեցի համեմատել «իսկական» մաթեմատիկան և շախմատը: Հիմա կարող ենք անկասկած համարել, որ իր էությամբ, խստությամբ և կարևորությամբ իսկական մաթեմատիկական թեորեմը մեծ առավելություն ունի շախմատի նկատմամբ: Մարզված մտքի համար գրեթե նույնքան

---

[37] Ենթադրվում է, որ ամբողջ տիեզերքում 10^{80} հատ պրոտոն կա: Եթե գրենք $(10^{10})^{10}$ թիվը, այն 50000 միջին չափսի հատոր կզբաղեցնի:

[38] 14-րդ պարագրաֆում նշեցի, որ 1000000000-ը չգերազանցող 50847478 հատ պարզ թիվ կա, սա սահմանն է, մինչև որը հասնում է մեր ճշգրիտ իմացությունը: Հիմա այս սահմանը ընդարձակվել է. օրինակ 10^{24}-ից փոքր պարզ թվերի քանակը 18 435 599 767 349 200 867 866 է: (Լրացումը թարգմանիչինն է):

ակնհայտ է, որ իսկական մաթեմատիկան գեղեցկության հարցում էլ մեծ առավելություն ունի, բայց ավելի դժվար է այդ առավելությունը որոշելը և նրա տեղը ցույց տալը, քանի որ շախմատային պարտիայի հիմնական թերությունը նրա «պարզությունն» է, և այս իմաստով հակադրությունը խառնվում է ցանկացած մաքուր գեղագիտական դատողության հետ և զրգռում վերջինին: Ի՞նչ «մաքուր գեղագիտական» հատկություններ կարող ենք գտնել այնպիսի թեորեմներում, ինչպիսիք են Էվկլիդեսի և Պյութագորասի թեորեմները: Կհամարձակվեմ միայն առանձին մեկնաբանություններ անել:

Երկու թեորեմն էլ (հասկանալի է, որ թեորեմներում ընդգրկում եմ ոչ միայն ձևակերպումները, այլև ապացույցները) աչքի է ընկնում անսպասելիության բարձր աստիճանով՝ անկասկածի և խնայողականի զուգորդմամբ: Ապացույցները ձևով անսովոր են ու զարմանալի, օգտագործվող գործիքները մանկականորեն պարզ են թվում հեռահար արդյունքների համեմատ, բայց բոլոր եզրահանգումները անհրաժեշտաբար հետևում են թեորեմից: Մանրուքները չեն խանգարում ապացույցի հիմնական գծին. յուրաքանչյուր դեպքում մեկ ուղղությամբ գրոհելը բավարար է: Նույնը վերաբերում է նաև ավելի դժվար շատ թեորեմների: Դրանք ըստ արժանավույն գնահատելու համար մաթեմատիկայից հիմնարար գիտելիք է պահանջվում: Մաթեմատիկական թեորեմ ապացուցելիս «բազմատարբերակություն» չի պահանջվում. բոլոր դեպքերի թվարկումը մաթեմատիկական ապացույցների ամենաձանձրալի ձևերից է: Մաթեմատիկական ապացույցը վառ աստղերով և հստակ ուրվագծերով համաստեղություն պիտի հիշեցնի, այլ ոչ թե լղոզված սահմաններով Ծիր Կաթնի աստղաբույլ:

Շախմատային խնդիրը նմանապես օժտված է անսպասելիությամբ և որոշակի խնայողությամբ: Էական է, որ քայլն անսպասելի լինի, և տախտակի վրա յուրաքանչյուր ֆիգուր իր դերն ունենա: Բայց գեղագիտական էֆեկտը կուտակային ազդեցություն ունի: Էական է նաև (միայն եթե շախմատային խնդիրը շատ պարզ չլինի, որ իսկապես զվարճալի լինի), որ վճռորոշ քայլից հետո եկող քայլերը շատ տարբերակներ ունենան, որոնցից յուրաքանչյուրն իր անհատական պատասխանը ունենա: «Եթե սպիտակները զինվորով գալիս են b5 դաշտը, սևերը պատասխանում են ձիու քայլով՝ e6, եթե...., ապա...., եթե....., ապա....»: Տպավորությունը կփչանար, եթե խաղացողը հակառակորդի ամեն քայլի դիմաց քայլերի այդքան շատ տարբերակ չունենար: Այս ամենն իսկական մաթեմատիկա է և իր արժանիքներն ունի, բայց շախմատային ապացույցները բոլոր հնարավոր տարբերակները թվարկելու միջոցով ապացույցների թվին են պատկանում, որոնք իրարից այնքան էլ շատ չեն տարբերվում, և որոնց իսկական մաթեմատիկայում արհամարհանքով են վերաբերում:

Հակված եմ մտածելու, որ կարող էի ուժեղացնել իմ փաստարկները՝ դիմելով շախմատիստների զգացմունքներին: Կասկած չի հարուցում, որ վարպետ շախմատիստը, նշանավոր պարտիաների և մրցամարտերի մասնակիցը, հոգու խորքում արհամարհանքով է վերաբերվում շախմատային խնդիրներ լուծելու մաքուր մաթեմատիկական արվեստին: Շախմատի իսկական վարպետը բավականին պահուստ ունի, որտեղից անհրաժեշտության դեպքում կարող է օգտվել պետքական քայլը գտնելու համար. «եթե հակառակորդս այսպիսի քայլ անի, կարող եմ պատասխանել հաղթանակի հասցնող այսպիսի կոմբինացիայով»: Բայց շախամատային նշանավոր պարտիան հիմնականում լավ մարզված երկու ուղեղների հոգեբանական մրցամարտ է և ոչ թե ընդամենը մաթեմատիկական ոչ մեծ թեորեմների հավաքածու:

Անհրաժեշտ է, որ վերադառնամ օքսֆորդյան իմ պաշտպանական խոսքին և ավելի ուշադիր քննարկեմ դրա կետերից մի քանիսը, որոնք հետաձգել էի § 6-ում: Արդեն ակնհայտ է, որ ինձ մաթեմատիկան հետաքրքրում է որպես արվեստ, որպես ստեղծական գործունեության տեսակ: Բայց պետք է նաև ուրիշ հարցեր քննարկել, մասնավորապես, մաթեմատիկայի օգտակարության (կամ ոչ օգտակարության) հարցը, որի մասին շատ անորոշություններ կան: Նաև անհրաժեշտ է քննարկել՝ իրականում արդյո՞ք մաթեմատիկան «անվտանգ» է, ինչպես պնդել եմ օքսֆորդյան իմ դասախոսությունում:

Գիտությունը կամ արվեստը ընդունված է «օգտակար» համարել, եթե դրանք, գոնե անուղղակի ավելացնում են մարդկանց նյութական բարեկեցությունը և հարմարավետությունը, կամ նպաստում են երջանկությանը, եթե օգտվենք այդ բառի պարզագույն առօրեական իմաստից: Օրինակ, բժշկությունը և ֆիզիոլոգիան օգտակար են, քանի որ նրանք բուժում են տառապանքներից, ճարտարագիտությունն օգտակար է, քանի որ մեզ օգնում է շենքեր և կամուրջներ կառուցելիս և այդպիսով նպաստում մեր կյանքի մակարդակը բարձրացնելուն (հասկանալի է, ճարտարագիտությունը նաև վնաս է տալիս, բայց հիմա խոսքը դրա մասին չէ): Այս իմաստով մաթեմատիկայի ինչ-որ մաս, անկասկած, օգտակար է: Ճարտարագետները չէին կարող իրենց խնդիրները լուծել առանց լավ «աշխատող» մաթեմատիկական գիտելիքի, ու մաթեմատիկան սկսել է կիրառություն գտնել նաև ֆիզիոլոգիայում: Այսպիսով, այստեղ մաթեմատիկան պաշտպանելու հող ենք գտնում: Հնարավոր է, որ սա լավագույն և նույնիսկ ամենաուժեղ պաշտպանությունը չէ, բայց անհրաժեշտ է այն ուսումնասիրել: Մաթեմատիկայի ավելի «ազնիվ» կիրառումները, եթե այդպիսիք կան, ստեղծական գործունեության բոլոր տեսակներին վերաբերող կիրառումներ են, մեր վերլուծության համար էական չեն: Պոեզիայի և երաժշտության նման մաթեմատիկան կարող է նպաստել «մտքի հնարավոր սովորությունը պահպանելուն և զարգացնելուն» և այդպիսով ավելացնել մաթեմատիկոսների և նույնիսկ ոչ մաթեմատիկոսների երջանկությունը, բայց այս իմաստով մաթեմատիկան պաշտպանելը կնշանակեր կրկնել այն, ինչ արդեն ասել եմ: Այն, ինչը հիմա պետք է վերլուծենք, մաթեմատիկայից «կոպիտ» օգուտն է:

Գիտություն է, որը կարելի է «ֆիզիկական երկրաչափություն» անվանել

Այս ամենը կարող է ակնհայտ թվալ, բայց հաճախ այստեղ էլ է շփոթություն լինում, քանի որ ամենից «օգտակար» առարկաները սովորաբար նրանք են, որոնց ուսումնասիրումը շատերիս համար բոլորովին անօգուտ է: Օգտակար է հասարակության մեջ ունենալ համապատասխան քանակի ֆիզիոլոգներ և ճարտարագետներ, բայց սովորական մարդու համար ֆիզիոլոգիա կամ ճարտարագիտություն ուսումնասիրելն ամենաօգտակար զբաղմունքը չէ (չնայած այս առարկաներն ուսումնասիրելը կարելի է պաշտպանել այլ հիմնավորումով): Իմ կողմից նշեմ, որ երբեք չեմ հայտնվել այնպիսի վիճակում, որ բացի մաքուր մաթեմատիկականից, ունեցածս մյուս գիտական գիտելիքներն ինձ փոքր-ինչ առավելություն տային:

Իսկապես, ուղղակի զարմանալի է, թե ինչ փոքր գործնական նշանակություն ունի գիտական գիտելիքը սովորական մարդու համար, որքան ձանձրալի ու սովորական են գիտական գիտելիքի այն մասերը, որ գործնական արժեք ունեն, և ինչպես է գիտական գիտելիքի գործնական նշանակությունը հակադարձ համեմատական նրա ենթադրյալ օգտակարությանը: Թվաբանական գործողությունները (թվաբանությունը, անկասկած, պատկանում է մաքուր մաթեմատիկային) բավականին արագ կատարել կարողանալն օգտակար է: Մի քիչ ֆրանսերեն կամ գերմաներեն իմանալը, մի քիչ պատմությունից ու աշխարհագրությունից, գուցե, նույնիսկ տնտեսագիտությունից գլուխ հանելն օգտակար են: Իսկ ինչ վերաբերում է քիմիային, ֆիզիկային կամ ֆիզիոլոգիային, այս գիտություններից համեստ գիտելիքները բացարձակ որևէ արժեք չունեն առօրյա կյանքում: Գիտենք, որ գազն այրվում է, թեև նրա բաղադրությունը չգիտենք. եթե մեր ավտոմեքենան փչանում է, տանում ենք ավտոնորոգող վարպետի մոտ, եթե մեկի փորը ցավում է, դիմում ենք բժշկի կամ դեղատուն ենք գնում: Մենք ապավինում ենք կա՛մ առողջ մտքին և առօրյա փորձին, կա՛մ այլոց մասնագիտական գիտելիքներին:

Դրանից բացի, այս կամ այն գիտության օգտակարությունը նաև կողմնակի՝ մանկավարժական հետաքրքրություն ունի, որ մասնավոր դպրոցների տնօրենների մտահոգության առարկան է, որոնք փրփուրը բերանին իրենց զավակների համար «օգտակար» կրթություն պահանջող ծնողներին խորհուրդներ պիտի տան:

Հասկանալի է, բոլորովին նկատի չունենք, որ եթե ֆիզիոլոգիան օգտակար է, մարդկանց մեծ մասը պետք է ֆիզիոլոգիա ուսումնասիրի: Մեր ասածի իմաստն այլ է. ֆիզիոլոգիայի զարգացումը փորձագետների ջանքերով կնպաստի հարմարավետության ավելացմանը մարդկանց մեծամասնության համար: Հարցը, որը հիմա մեզ հետաքրքրում է, այն է, թե ինչ չափով մաթեմատիկան կարող է հավակնել այդպիսի օգտակարության, մաթեմատիկայի ո՛ր բաժիններն են հատկապես հավակնում օգտակար լինելու, և մաթեմատիկան ինտենսիվ սովորելը որքանով կարող է հիմնավորվել միայն օգտակարության տեսանկյունից:

Հավանաբար, արդեն ակնհայտ է, թե ինչ եզրակացությունների եմ հանգելու, այդ պատճառով կցանկանայի սկզբում դրանք ձևակերպել դոգմատիկ ձևով, իսկ հետո ավելի մանրամասն դիտարկել: Կասկած չկա, որ տարրական մաթեմատիկայի զգալի մասը (այդ բառը օգտագործում եմ այն իմաստով, որով օգտագործում են պրոֆեսիոնալ մաթեմատիկոսները. այդպիսի ընկալման դեպքում տարրական մաթեմատիկան ներառում է դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվին հստակ տիրապետելը) շատ գործնական կարևորություն ունի: Ընդհանուր առմամբ մաթեմատիկայի այդ բաժինները ձանձրալի են. դրանք այն բաժիններն են, որ ամենաքիչ գեղագիտական արժեք ունեն: «Իսկական» մաթեմատիկոսների «իսկական» մաթեմատիկան՝ Ֆերմայի, Էյլերի, Գաուսի, Աբելի և Ռիմանի մաթեմատիկան համարյա անօգտակար է (սա ճիշտ է ինչպես «կիրառական», այնպես էլ «մաքուր» մաթեմատիկայի առումով): Որևէ պրոֆեսիոնալ մաթեմատիկոսի կյանքը հնարավոր չէ արդարացնել միայն իր աշխատանքների «օգտակարության» հիման վրա:

Այստեղ մի թյուրըմբռնում պետք է շոշափեմ: Երբեմն կարծիքներ են հնչում, թե մաքուր մաթեմատիկոսներն իրենց աշխատանքների անօգտակարությունը որպես արժանիք են ներկայացնում և հպարտանում, որ այդ աշխատանքները գործնական կիրառություն չունեն: Սովորաբար նման մեղադրանքը Գաուսին վերագրվող մի անզգույշ արտահայտության արդյունք է, թե իբր ասել է, որ եթե մաթեմատիկան գիտությունների թագուհին է, ապա մաթեմատիկայի թագուհին էլ թվերի տեսությունն է իր բացարձակ անօգտակարության պատճառով: Ճշգրիտ մեջբերումն այդպես էլ չկարողացա գտնել: Վստահ եմ, որ Գաուսի արտահայտությունը (եթե երբևէ նման բան ասել է) շատ կոպտորեն աղավաղվել է: Եթե հնարավոր լիներ թվերի տեսությունն օգտագործել որևէ կիրառական և ակնհայտ պատվական նպատակով, եթե հնարավոր լիներ այն անմիջականորեն ուղղել մարդկության երջանկությանը կամ նրա տառապանքը նվազեցնելուն, ինչպես ֆիզիոլոգիայի կամ նույնիսկ քիմիայի դեպքում, ապա, անկասկած, ո՛չ Գաուսը, ո՛չ էլ որևէ ուրիշ մաթեմատիկոս այնքան հիմար չէր լինի, որ նվազեցներ այդ կիրառությունները կամ ափսոսար դրանք: Բայց գիտությունն աշխատում է ինչպես ի վնաս, այնպես էլ հօգուտ (հատկապես պատերազմի ժամանակ): Ե՛վ Գաուսին, և՛ ավելի ցածր դիրքի մաթեմատիկոսների կարելի է արդարացնել, որ ուրախանում են, որ գոնե մեկ գիտություն կա (և դա այն գիտությունն է, որով իրենք են զբաղվում), որի կտրվածությունը սովորական մարդկային գործունեությունից՝ իր բոլոր արտահայտություններով, անհրաժեշտ է մաքուր և անձեռնմխելի պահել:

Մի թյուրըմբռնում էլ կա, որը անհրաժեշտ է պարզաբանել: Միանգամայն բնական է ենթադրելը, որ «մաքուր» և «կիրառական» մաթեմատիկաների միջև օգտակարության իմաստով մեծ տարբերություն կա: Սա մոլորություն է. մաքուր և կիրառական մաթեմատիկաների միջև մեծ տարբերություն կա, որը հիմա կբացատրեմ, բայց դա քիչ է ազդում նրանց օգտակարության վրա:

Ինչո՞վ է մաքուր մաթեմատիկան տարբերվում կիրառականից: Այս հարցին կարելի շատ որոշակի պատասխանել: Ավելին՝ պատասխանի վերաբերյալ մաթեմատիկոսները համամիտ են: Իմ պատասխանում որևէ, թեկուզ դույզն-ինչ տարօրինակ բան չկա, բայց այն կարիք ունի ոչ մեծ նախաբանի:

Հաջորդ երկու բաժինները թեթևակի փիլիսոփայական երանգավորում ունեն: Իմ հիմնական թեզիսներում փիլիսոփայությունը շատ խորը չէ, և դրանց համար էական նշանակություն չունի, բայց կօգտագործեմ բառեր, որոնք շատ հաճախ փիլիսոփայական ենթատեքստ կունենան և ընթերցողին կարող են թյուրմացության հանգեցնել, եթե չբացատրեմ, թե ինչ իմաստով եմ հետագայում դրանք օգտագործելու:

Հաճախ եմ «իսկական» ածականն օգտագործում այնպես, ինչպես կիրառում ենք սովորական զրույցում: Արդեն խոսել եմ «իսկական մաթեմատիկայի» և «իսկական մաթեմատիկոսների» մասին: Նույն հաջողությամբ կարող էի խոսել «իսկական պոեզիայի» կամ «իսկական պեոտների» մասին, և կշարունակեմ նույն ոգով: Բայց նաև «իրականություն» բառը հետևյալ երկու տարբեր նշանակությամբ կօգտագործեմ:

Նախ և առաջ կխոսեմ «ֆիզիկական իրականության» մասին, ընդ որում «իրականություն» բառը կօգտագործեմ իր սովորական իմաստով: Ֆիզիկական իրականություն ասելով՝ հասկանում եմ ցերեկվա և գիշերվա, երկրաշարժերի և խավարումների նյութական աշխարհը, որ փորձում է նկարագրել ֆիզիկան:

Մինչև հիմա մտավախություն չեմ ունեցել, որ ընթեցողներիցս որևէ մեկն իմ օգտագործած բառերի ընկալման դժվարություն կունենա, բայց հիմա ավելի անհուսալի վիճակում եմ: Իմ և, կարծում եմ, մաթեմատիկոսների մեծ մասի համար գոյություն ունի ուրիշ իրականություն, որը կանվանեմ «մաթեմատիկական իրականություն», և մաթեմատկոսներն ու փիլիսոփաները միասնական կարծիք չունեն մաթեմատիկական իրականության վերաբերյալ: Մի մասը համարում է, որ դա մեր «մտքում» է, և մենք, ինչ-որ իմաստով, կառուցում ենք այն: Մյուսները համարում են, որ դա մեզնից դուրս է և մեզնից կախված չէ: Ով մաթեմատիկական իրականության համոզիչ նկարագրությունը կարողանար տալ, մետաֆիզիկայի շատ դժվար հարցեր լուծած կլիներ: Եթե այդ մարդն իր նկարագրության մեջ կարողանար նաև ֆիզիկական իրականությունն ընդգրկել, մետաֆիզիկայի բոլոր խնդիրները կլուծեր:

Չպիտի քննարկեի այս հարցերից որևէ մեկը, եթե նույնիսկ բավականին իրազեկ լինեի դրա համար, բայց դոգմատիկ ձևով կշարադրեմ իմ դիրքորոշումը, որպեսզի խուսափեմ դույզն-ինչ թերըմռնումից: Համոզված եմ, որ մաթեմատիկական իրականությունը մեզնից դուրս է, որ մեր դերն է բացահայտել և հետազոտել այն, և որ թեորեմները, որ ապացուցում ենք և պերճախոս ձևով ներկայացնում որպես մեր «ստեղծագործություններ», իրականում մաթեմատիկական իրականության դիտարկումների մեր գրառումներն են: Այս տեսակետը այս կամ այն կերպ արտահայտել են ամենաբարձր կարգի փիլիսոփաներ, սկսած Պլատոնից, և ես կօգտվեմ այս տեսակետն ունեցող մարդու համար բնական լեզվից: Փիլիսոփայություն չսիրող մարդը կարող է փոխել լեզուն, բայց դա շատ քիչ բան կփոխի իմ եզրակացություններում:

23

Մաքուր և կիրառական մաթեմատիկաների տարբերությունը հավանաբար ամենապարզը երևում է երկրաչափության դեպքում: Մաքուր երկրաչափություն գիտություն կա, որն իր մեջ բազմաթիվ երկրաչափություններ ունի՝ պրոեկցիոն, էվկլիդեսյան, ոչ էվկլիդեսյան և այլ: Այդ երկրաչափություններից յուրաքանչյուրը մոդել է, գաղափարների պատկեր, և նրա մասին պետք է դատել նրա անհատական «պատկերի» հետաքրքրությամբ և գեղեցկությամբ: Սա բազմաթիվ ձեռքերի միասնական աշխատանքի արդյունք քարտեզ է կամ նկար, մաթեմատիկական իրականության հատվածի մասնակի և անկատար պատճենը (բայց ամեն դեպքում՝ ճշգրիտ իր ամբողջ ընթացքում): Բայց մեզ համար հիմա կարևոր է այն, որ կա մի բան, որի նկատմամբ մաքուր երկրաչափությունները նկար չեն, այն է՝ ֆիզիկական աշխարհի տարածական-ժամանակային իրականությունը: Կասկած չկա, որ մաքուր երկրաչափությունները չեն կարող իրականության նկարները լինել, քանի որ երկրաշարժերը և խավարումները մաթեմատիկական հասկացությունների թվին չեն պատկանում:

Կողմնակի մարդու համար սա մի քիչ պարադոքսալ է հնչում, բայց երկրաչափի համար ծեծված ճշմարտություն է: Միտքս գուցե կարողանամ բացատել օրինակի միջոցով. ենթադրենք՝ դասախոսություն եմ կարդում երկրաչափության որևէ համակարգի մասին, օրինակ, սովորական էվկլիդեսյան երկրաչափության, և լսարանի երևակայությունը գրգռելու նպատակով գրատախտակին պատկերներ եմ գծում՝ ուղիղներ, շրջանագծեր, էլիպսներ պարունակող կոպիտ գծագրեր: Պարզ է, որ իմ ապացուցած թեորեմների ճշմարտացիությունը կախված չէ գծագրի որակից: Դրանց դերը միայն այն է, որ ունկնդիրներիս հասցնեմ՝ ինչ նկատի ունեմ, և եթե այդքանը կարողանում եմ անել, ապա իմաստ չկա, որ գծագրերը վարպետ գծագրողն անի: Իմ գծագրերը օժանդակ մանկավարժական դեր ունեն և իմ դասախոսության առարկայի մաս չեն կազմում:

Մի քայլ էլ անենք: Սենյակը, որտեղ դասախոսություն եմ կարդում, ֆիզիկական աշխարհի մաս է, և ինքն էլ որոշակի ձև ունի: Այդ ձևի և ամբողջ ֆիզիկական իրականության ձևի ուսումնասիրությունը ինքնին գիտություն է, որը կարելի է «ֆիզիկական երկրաչափություն» անվանել: Հիմա ենթադրենք, որ սենյակում հզոր դինամոմեքենա կամ մեծ գրավիտացիոն մարմին տեղադրեցին: Ֆիզիկոսները կասեն, որ սենյակի երկրաչափությունը փոխվեց, որ ամբողջ ֆիզիկական պատկերը քիչ, բայց որոշակի աղավաղվեց: Իմ ապացուցած թեորեմները դրանից սխա՞լ դարձան: Պարզ է, որ հիմար ենթադրություն կլիներ, թե սենյակում դինամոմեքենայի կամ գրավիտացիոն մարմնի առկայությունը թեորեմների իմ բերած ապացույցների վրա ինչ-որ կերպ կազդի: Դա նման է այն ենթադրությանը, թե Շեքսպիրի պիեսը կփոխվի նրանից, որ մի ընթերցող էջի վրա թեյ թափի: Պիեսը կախված չէ այն էջերից, որոնց վրա տպված է, և «մաքուր երկրաչափությունները» էլ կախված չեն այն սենյակից, որտեղ դասախոսություն են կարդում, կամ ֆիզիկական աշխարհի այլ մասերից:

Այսպիսին է մաքուր մաթեմատիկոսի տեսակետը: Բնական է, որ կիրառական մաթեմատիկայով, մաթեմատիկական ֆիզիկայով զբաղվողներն այլ տեսակետ ունեն, քանի որ նրանք գործ ունեն ֆիզիկական աշխարհի հետ, որը նույնպես օժտված է սեփական կառուցվածքով կամ պատկերով: Այդ պատկերի ճշգրիտ նկարագրությունը չենք կարող տալ, ինչպես մաքուր երկրաչափության դեպքում, բայց դրա մասին կարող ենք կարևոր բան ասել: Երբեմն բավարար ճշգրտությամբ, երբեմն միայն ընդհանուր գծերով կարող ենք նկարագրել ֆիզիկական աշխարհի տարբեր բաղադրիչների միջև եղած առնչությունները և դրանք համեմատել մաքուր երկրաչափության որևէ համակարգի բաղադրիչների միջև եղած առնչությունների հետ: Կարող ենք նկատել առնչությունների երկու հավաքածուների միջև եղած որոշակի նմանությունները, և այդ դեպքում մաքուր երկրաչափությունը հետաքրքիր կդառնա ֆիզիկոսի համար: Այս դեպքում ունենում ենք պատկեր, որը համաձայնեցվում է ֆիզիկական աշխարհի փաստերի հետ: Երկրաչափը ֆիզիկոսի ընտրությանը պատկերների ամբողջ հավաքածու է առաջարկում: Հնարավոր է, որ պատկերներից մեկը մյուսներից ավելի լավ համապատասխանի փաստերին: Այդ դեպքում կիրառական մաթեմատիկայի համար ամենակարևոր երկրաչափությունը կլինի այդ պատկերը ծնող երկրաչափությունը: Կարելի ավելացնել, որ նույնիսկ մաքուր մաթեմատիկոսի համար այդպիսի երկրաչափության գնահատականը կբարձրանա, քանի որ չկա այնպիսի մաքուր մաթեմատիկոս, որը հետաքրքրություն չունենա ֆիզիկական աշխարհի նկատմամբ, բայց ինչքան նա տրվի այդ գայթակղությանը, այդքան կկորցնի մաքուր մաթեմատիկոսի իր դիրքերը:

24

Այս հարցին առնչվող մի դիտողություն էլ կա: Ֆիզիկոսներին այն կարող է պարադոքսալ թվալ, չնայած պարադոքսը հիմա պակաս զարմանալի է, քան տասնութ տարի առաջ: Դա բերում եմ գրեթե նույն բառերով, որոնցով ձևակերպել եմ Բրիտանական միության Ա բաժնում կարդացած զեկուցմանս մեջ: Լսարանս գրեթե ամբողջությամբ ֆիզիկոսներից էր, և այդ պատճառով էլ, գուցե, ելույթս մի քիչ սադրիչ էր: Ի դեպ, ինչ վերաբերում է դրա բովանդակությանը, հիմա էլ ամբողջությամբ ընդունում եմ այն ժամանակ արտահայտած դիրքորոշումս:

Սկսեցի այն պնդումից, որ մաթեմատիկոսի և ֆիզիկոսի դիրքորոշումների միջև տարբերությունն ավելի քիչ է, քան կարծում են: Ամենակարևորն այն է, որ մաթեմատիկոսը իրականությանը շփվում է ավելի մոտիկից, քան ֆիզիկոսը: Նման պնդումը կարող է պարադոքսալ թվալ, քանի որ ընդունված է «իրատես» համարել հենց ֆիզիկոսին է, որ ուսումնասիրում է նյութական առարկաներն ու երևույթները: Բայց բավական է մի քիչ մտորել, որ հասկանանք՝ ֆիզիկական իրականությունը, ինչպիսին էլ լինի, քիչ ատրիբուտներ ունի (եթե ընդհանրապես ունի), որոնք առողջ միտքն ամբողջությամբ վերագրում է իրականությանը: Աթոռը կարող է միջուկների շուրջը պտտվող էլեկտրոնների կամ Տեր Աստծու մտքում ծագած գաղափարների հավաքածու լինել. գուցե այս նկարագրություններից յուրաքանչյուրն ունի իր առավելությունները, բայց դրանցից ոչ մեկը չի համապատասխանում առողջ դատողությանը:

Հետո նշեցի, որ ո՛չ ֆիզիկոսները, ո՛չ փիլիսոփաները չեն տվել փոքր-ինչ համոզիչ նկարագրությունը «ֆիզիկական իրականության» կամ նրա, թե ինչպես է ֆիզիկոսը փաստերի և զգացողությունների խճճված զանգվածից, որից սկսում է, անցնում այն օբյեկտները կառուցելուն, որոնք «իրական» է անվանում: Օրինակ, չենք կարող ասել, թե գիտենք ինչ է ֆիզիկան, բայց դա չպետք է խանգարի մեզ հասկանալու ընդհանուր գծերով, թե հատկապես ինչ է ցանկանում անել ֆիզիկոսը: Պարզ է, որ ֆիզիկոսը փորձում է համատեղել իրեն հանդիպած հում փաստերի ցրված զանգվածը՝ տրամադրության տակ ունենալով վերացարկված հարաբերությունների որոշակի կարգավորված սխեմա՝ սխեմայի այն տարատեսակը, որը ֆիզիկոսը կարող է փոխառնել մաթեմատիկոսից:

Մյուս կողմից, մաթեմատիկոսը գործ ունի սեփական մաթեմատիկական իրականության հետ: Ինչպես բացատրեցի § 22-ում, ես գերադասում եմ մաթեմատիկական իրականության «իրական» և ոչ թե «իդեալիստական» տեսակետը:

Ամեն դեպքում (և դա էր իմ հիմնական պնդումը) նման ռեալիստական տեսակետը մաթեմատիկական իրականությանը շատ ավելի ճշմարտանման է, քան ֆիզիկական իրականությանը, որովհետև մաթեմատիկական օբյեկտները ավելի շատ են այնպիսին, ինչպիսին թվում են: Աթոռը կամ աստղը ամենևին նման չեն նրան, ինչ թվում են. որքան շատ ենք մտածում այդ մասին, այնքան ավելի աղոտ են դառնում դրանց ուրվագծերը շրջապատող զգացողությունների մշուշում. բայց «2»-ը կամ «317»-ը ոչ մի կապ չունեն զգացողությունների հետ, և թվերի հատկություններն ավելի լավ են երևում, որքան ավելի ուշադիր ենք դրանց նայում: Հավանական է, որ ժամանակակից ֆիզիկան ամենալավը տեղավորվում է իդեալիստական փիլիսոփայության շրջանակում: Անձամբ ես դրան չեմ հավատում, բայց որոշ ճանաչված ֆիզիկոսներ այդպես են ասում: Մյուս կողմից, մաքուր մաթեմատիկան ինձ պատկերվում է ժայռի նման, որի վրա հենվում է իդեալիզմը. 317 թիվը պարզ է ոչ այն պատճառով, որ այդպես ենք մտածում, և ոչ այն պատճառով, որ մեր գիտակցությունն է այդպես կառուցված, և ոչ այլ կերպ, այլ դա այդպես է, որովհետև մաթեմատիկական իրականությունն այդպես է կառուցված:

Մաքուր և կիրառական մաթեմատիկաների միջև այդ տարբերություններն ինքնին կարևոր են, բայց առանձնակի կապ չունեն մաթեմատիկայի «օգտակարության» քննարկվող հարցի հետ: § 21-ում խոսեցի Ֆերմայի և մյուս մեծ մաթեմատիկոսների մաթեմատիկայի մասին, որ գեղագիտական մնայուն արժեք ունի, ինչպես, օրինակ, հին հունական մաթեմատիկայի լավագույն օրինակները, հավերժական մաթեմատիկայի, քանի որ նրա լավագույն ստեղծագործությունները, լավագույն գեղարվեստական ստեղծագործությունների նման շարունակում են հազար տարի անց հազարավոր մարդկանց էմոցիոնալ բավարարություն պարգևել: Այդ մաթեմատիկան ստեղծողները հիմնականում մաքուր մաթեմատիկոսներ էին (չնայած այն ժամանակ տարբերությունը մաքուր և կիրառական մաթեմատիկաների միջև պակաս հստակ էր, քան հիմա), բայց միայն մաքուր մաթեմատիկոսների մասին չէի մտածում: «Իսկական» մաթեմատիկոսների թվին եմ դասում Մաքսվելին և Էյնշտեյնին, Էդինգտոնին և Դիրակին: Կիրառական մաթեմատիկայի բնագավառում ժամանակակից մեծ ձեռքբերումներ կան և՛ հարաբերականության տեսության մեջ, և՛ քվանտային մեխանիկայում, և գիտության այդ բնագավառները, գոնե հիմա, գրեթե նույնքան «անօգտակար» են, ինչպես թվերի տեսությունը: Բարի կամ չար գործ են անում կիրառական մաթեմատիկայի տխուր տարրական բաժինները, ճիշտ այնպես, ինչպես և մաքուր մաթեմատիկայի տխուր տարրական բաժինները: Ժամանակն այս ամենը կարող է արմատապես փոխել: Ոչ ոք չէր կանխատեսում, որ ժամանակակից ֆիզիկայում կիրառություն կունենան մատրիցաների և խմբերի տեսությունները, ինչպես նաև մաքուր մաթեմատիկայի այլ բաժիններ, և շատ հավանական է, որ «մեծամիտ» մաթեմատիկայի ինչ-որ բաժիններ հանկարծ «օգտակար» դառնան: Բայց, ինչպես գիտելիքի այս և մյուս բնագավառում կուտակած փորձն է ցույց տալիս, գործնական կյանքում օգտակար է այն, ինչը հասարակ է և ձանձրալի:

Հիշում եմ Էդինգտոնին, որ «օգտակար» գիտության անգրավչության լավ օրինակ է տալիս: Բրիտանական միությունը Լիդսում նիստ էր անցկացնում, և ինչ-որ մեկի խելքին փչել էր, որ նրա անդամներին բրդի մշակման արտադրության մեջ գիտության կիրառության մասին լսելը հետաքրքիր կլինի: Բայց այդ նպատակով կազմակերպված դասախոսությունները և ցուցադրությունները տապալվեցին: Պարզվեց, որ միության անդամները (անկախ նրանից՝ Լիդսում էին ապրում, թե ոչ) ծարավի էին զվարճանքների, իսկ բուրդ մշակելու արդյունաբերությունն առանձնապես հետքրքիր չէր: Այդ պատճառով էլ դասախոսությունների հաճախելիությունն անասելի ցածր էր: Ինչ վերաբերում է Կնոսեի պեղումների, հարաբերականության տեսության կամ պարզ թվերի տեսության վերաբերյալ դասախոսություններին, նրանք լսարաններում հավաքվածների հիացական արձագանքին արժանացան:

Մաթեմատիկայի ո՞ր բաժիններն են օգտակար

Ամենից առաջ նրանք, որ կազմում են դպրոցական մաթեմատիկան. թվաբանությունը, տարրական հանրահաշիվը, տարրական էվկլիդեսյան երկրաչափությունը, դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի ներածությունը: Այս ցանկից ստիպված ենք որոշակի քանակով հանել՝ ինչ սովորեցնում են մասնագետներին, օրինակ, պրոեկցիոն երկրաչափությունը: Կիրառական մաթեմատիկայից օգտակար են մեխանիկայի տարրերը (էլեկտրականության տեսությունն այն տեսքով, որ հիմա դասավանդում են դպրոցում, պետք է ֆիզիկա համարել):

Օգտակար են նաև համալսարանական մաթեմատիկայի զգալի մասը, հատկապես այն մասը, որը էությամբ դպրոցական մաթեմատիկայի շարունակություն է կազմում, բայց ավելի հարուստ ապարատով, և ֆիզիկայի որոշ մասեր, ինչպես էլեկտրականության տեսությունը, հիդրոմեխանիկան: Պետք է հիշել, որ գիտելիքի ցանկացած պաշար առավելություն է, և որ ամենագործնական մաթեմատիկոսները կարող են լուրջ դժվարությունների առաջ հայտնվել, եթե նրանց գիտելիքները սահմանափակված են միայն անհրաժեշտն ընդգրկող նվազագույնով: Այս դատողություններից ելնելով՝ մաթեմատիկայի՝ վերը թվարկված բաժիններին պետք է մի քիչ ավելացնել: Ինչ վերաբերում է մեր ընդհանուր եզրակացությանը, այն հանգում է հետևյալին՝ մաթեմատիկան օգտակար է այն ծավալով, որքանով այն պահանջված է բարձր կարգի ճարտարագետի կամ «միջին» ֆիզիկոսի կողմից, կամ այլ կերպ ասած՝ «օգտակար» մաթեմատիկան աչքի չի ընկնում հատուկ գեղագիտական արժանիքներով: Օրինակ, էվկլիդեսյան երկրաչափությունն օգտակար է այնքանով, որքանով տաղտկալի է. մեզ պետք չեն զուգահեռ ուղիղների մասին աքսիոմը, համամասնությունների տեսությունը կամ կանոնավոր հնգանկյան կառուցումը:

Շատ հետաքրքիր եզրակացություն է ստացվում՝ մաքուր մաթեմատիկան ընդհանրապես ավելի օգտակար է, քան կիրառականը: Մաքուր մաթեմատիկան կիրառականի նկատմամբ առավելություն ունի և՛ գործնական, և՛ գեղագիտական առումներով: Առավել օգտակար է նախևառաջ մաթեմատիկական ապարատը, կամ մաթեմատիկական տեխնիկան, իսկ դա ուսումնասիրում են հիմնականում մաքուր մաթեմատիկայի օգնությամբ:

Հուսով եմ, որ անհրաժեշտություն չկա հատուկ նշելու, որ ամենևին չեմ փորձում նսեմացնել կամ նվազեցնել մաթեմատիկական ֆիզիկան՝ հիանալի գիտական առարկան իր հրաշալի խնդիրներով, որոնց լուծումը լայն հնարավորություն է տալիս ամենաբուռն երևակայությանը: Միայն որոշակի խղճահարությա՞ն չէ արժանի սովորական կիրառական մաթեմատիկոսի վիճակը: Եթե նա ցանկանում է օգտակար լինել, ստիպված է օգտագործել ձանձրալի, սովորական մեթոդներ և չի կարող ազատություն տալ իր երևակայությանը, նույնիսկ եթե ցանկանում է հասնել անասելի բարձունքների: «Երևակայական» տիեզերքը շատ ավելի գեղեցիկ է վատ կառուցված «իրական» տիեզերքից, և կիրառական մաթեմատիկոսի երևակայության գեղեցկագույն պտուղների մեծ մասը միանգամից մերժվում է ստեղծումից անմիջապես հետո այն կոշտ, բայց բավարար հիմնավորումով, որ դրանք փաստերին չեն համապատասխանում:

Ընդհանուր եզրակացությունը բավականին հասկանալի է: Եթե օգտակար գիտելիք ասելով, ինչպես ժամանակավորապես պայմանավորվեցինք, հասկանանք այնպիսին, որ կա՛մ հիմա, կա՛մ մոտ ապագայում կնպաստի մարդկության նյութական բարեկեցությանը (այսինքն՝ մաքուր մտավոր բավարարվածությունը հաշվի չի առնվում), բարձրագույն մաթեմատիկայի մեծ մասը անօգտակար կլինի: Ժամանակակից երկրաչափությունն ու հանրահաշիվը, թվերի տեսությունը, բազմությունների և ֆունկցիաների տեսությունները, հարաբերականության տեսությունը, քվանտային մեխանիկան. այս գիտություններից ոչ մեկը մյուսներից ավելի չի բավարարում օգտակարության հայտանիշին, և չկա ոչ մի իսկական մաթեմատիկոս, որի կյանքը արդարացված լիներ այս հիմքով: Եթե հետևենք այս չափանիշին, Աբելը, Ռիմանը, Պուանկարեն իրենց կյանքն իզուր են ապրել, նրանց ներդրումը մարդկության բարեկեցության մեջ անասելի փոքր է, և առանց նրանց աշխարհը ոչինչ կորցրած չէր լինի:

«Օգտակար» հասկացության իմ առաջարկած ընկալման դեմ կարող են առարկել՝ նշելով, որ այն սահմանել եմ «երջանկություն» կամ «հարմարավետություն» հասկացությունների միջոցով՝ անտեսելով մաթեմատիկայի «հասարակական» հետևանքները, ինչին ժամանակակից տարբեր հակումներով և ճաշակով հեղինակները սկսել են մեծ ուշադրություն դարձնել: Օրինակ, Ուայթհեդը (նախկին մաթեմատիկոս) նշում է «մաթեմատիկայի հսկայական ազդեցությունը մարդկանց կյանքի, նրանց ամենօրյա զբաղմունքի, հասարակության կազմակերպման վրա»: Հոքբենը (նա ջերմ վերաբերմունք չունի այն բանի նկատմամբ, ինչ ես և մյուս մաթեմատիկոսները մաթեմատիկա ենք անվանում, և ինչի նկատմամբ Ուայթհեդը բավականին դրական է վերաբերվում) ասում է, որ «առանց մաթեմատիկայի, քանակի և կարգի քերականության, չենք կարող ծրագրավորել խելամիտ հասարակություն, որտեղ բարեկեցություն կա բոլոր համար, և ոչ մեկի համար աղքատություն չկա»:

Չեմ կարծում այս ողջ պերճախոսությունը կարող է հանգստացնել մաթեմատիկոսներին: Երկու հեղինակների լեզուն էլ հարուստ է սարսափելի չափազանցություններով, և երկուսն էլ անտեսում են շատ ակնհայտ տարբերություններ: Հոգբենի դեպքում լրիվ բնական է, քանի որ ընդհանուրի կարծիքով մաթեմատիկոս չէ. «մաթեմատիկա» ասելով նա հասկանում է այն մաթեմատիկան, որը հասանելի է իր գիտակցությանը. դրան անվանում են «դպրոցական» մաթեմատիկա: Չի կարելի չխոստովանել, որ այդ մաթեմատիկան բազմաթիվ կիրառություններ ունի, որոնք, եթե ցանկալի է, կարելի է անվանել «հասարակական»: Հոգբենը դրանք ամրագրել է մաթեմատիկական հայտնագործությունների բազմաթիվ հետաքրքիր պատմական էքսկուրսներով: Այս հնարքը պետք է հաջողված համարել, քանի որ Հոգբենին հնարավորություն է տվել իր գրքի ընթերցողների, որ մաթեմատիկոս չեն եղել և երբեք էլ չեն լինի, գիտակցությանը հասցնել, որ մաթեմատիկայում ավելի շատ բան կա, քան իրենք կարծում էին: Միաժամանակ Հոգբենն էլ կարծես չի հասկանում, թե ինչ է «իսկական» մաթեմատիկան (դա պարզ կդառնա յուրաքանչյուրին, որ կարդա, թե ինչ է Հոգբենը գրում Պյութագորասի թեորեմի, Էվկլիդեսի և Էյնշտեյնի մասին), և դրա նկատմամբ ջերմ զգացմունքներ չունի (դա չի էլ թաքցնում): Հոգբենի համար «իսկական» մաթեմատիկան կարեկցական խղճահարության օբյեկտ է:

Ուայթհեդի դեպքում դժվարությունը ըմբռնումի և կարեկցանքի անբավարարությունը չէ. խանդավառությամբ լցված՝ նա մոռանում է մաթեմատիկայի տարբերակիչ առանձնահատկությունները, որոնք իրեն լավ հայտնի են: Մաթեմատիկան, որ «հսկայական ազդեցություն» է թողնում «մարդկանց ամենօրյա կյանքի» և «հասարակության կազմակերպման» վրա, ոչ թե Ուայթհեդի մաթեմատիկան է, այլ Հոգբենի: Մաթեմատիկան, որ կարելի է օգտագործել «սովորական մարդկանց սովորական նպատակների համար» աննշան է, իսկ այն մաթեմատիկան, որը կարող են օգտագործել տնտեսագետները և սոցիոլոգները, հազիվ հասնի քոլեջի մակարդակի: Ուայթհեդի մաթեմատիկան կարող է խորը ազդեցություն ունենալ աստղագիտության կամ ֆիզիկայի վրա, կարևոր՝ փիլիսոփայության համար (մի սեռի բարձր մտածողությունը մեծ հավանականությամբ ազդում է մեկ այլ սեռի բարձր մտածողության վրա), բայց մնացած հարցերում շատ թույլ է ազդում: Ուայթհեդի մաթեմատիկան «հսկայական ազդեցություն» ունի ոչ թե մարդկանց վրա ընդհանրապես, այլ իր՝ Ուայթհեդի վրա:

Այսպիսով, երկու մաթեմատիկա գոյություն ունի: Կա «իսկական» մաթեմատիկոսների «իսկական» մաթեմատիկա, և մյուսը, որ ավելի հարմար բառ չգտնելու պատճառով, կանվանեմ «պարզունակ»[39] մաթեմատիկա: Պարզունակ մաթեմատիկան արդարացնելու համար կարելի է հղում անել Հոգբենին կամ նրա դպրոցի այլ հեղինակների, բայց այդպիսի արդարացում գոյություն չունի իրական մաթեմատիկայի համար, որը հարկ է որպես արվեստ արդարացնել, եթե ընդհանրապես կարելի է արդարացնել: Այս տեսակետում, որին սովորաբար հարում են մաթեմատիկոսները, արտասովոր կամ պարադոքսալ ոչինչ չկա:

Մի հարց էլ է մնացել, որը անհրաժեշտ է քննարկել: Եկանք այն եզրակացության, որ պարզ մաթեմատիկան օգտակար է, իսկ իսկականը՝ ոչ: Սակայն մինչև հիմա մեզ հայտնի չէ՝ վնաս չի՞ բերում պարզունակ կամ իսկական մաթեմատիկան: Պարադոքսալ կլիներ մտածելը, թե այս կամ այն տեսակի մաթեմատիկան կարող է շատ վնասել խաղաղ ժամանակներում, այդ պատճառով էլ անհրաժեշտություն է դառնում քննարկելը մաթեմատիկայի ազդեցությունը պատերազմների վրա: Այդպիսի հարցերն անկողմնակալ քննարկելը հիմա շատ դժվար է, և կնախընտրեի խուսափել այդ քննարկումից: Սակայն քննարկելուց լրիվ հրաժարվելը հնարավոր չի թվում: Բարեբախտաբար, այդպիսի քննարկումը պարտադիր չէ, որ երկար լինի:

Իսկական մաթեմատիկոսի համար մի մխիթարական եզրահանգում կա՝ իսկական մաթեմատիկան պատերազմի վրա ազդեցություն չի թողնում: Դեռ ոչ մեկին չի հաջողվել գտնել ռազմական կամ պատերազմին առնչվող որևէ խնդիր, որին ծառայի թվերի տեսությունը կամ հարաբերականության տեսությունը, և քիչ հավանական է, որ ինչ-որ մեկը այդպիսի բան գտնի, քանի տարի էլ որ առաջ նայենք: Ճիշտ է, կան կիրառական մաթեմատիկայի բաժիններ, ինչպես բալիստիկան և աէրոդինամիկան, որ հենց ռազմական նպատակներով են ստեղծվել և մաթեմատիկական նուրբ ապարատ են պահանջում: Դրանք դժվար է «ծեծված» անվանել, բայց «իսկականի» աստիճանի էլ ո՛չ բալիստիկան, ո՛չ աէրոդինամիկան չեն հավակնում: Ե՛վ մեկը, և՛ մյուսը վանող անճոռնի են և անասելի ձանձրալի: Նույնիսկ Լիթլվուդին չհաջողվեց բալիստիկային պատկառելիություն հաղորդել, իսկ եթե նրան չի հաջողվել, էլ ո՞ւմ ուժը կպատի: Այսպիսով, իրական մաթեմատիկոսի խիղճը մաքուր է. նրա

[39] «Պարզունակ» բառն այստեղ գործածվում է ծեծված, ծամծմված, տաղտկալի իմաստով:

աշխատանքի արժեքը կասկածի տակ դնող ոչինչ չկա. ինչպես Օքսֆորդում իմ դասախոսության մեջ ասել եմ՝ մաթեմատիկան «անվնաս և անմեղ» զբաղմունք է:

Մյուս կողմից՝ պարզունակ մաթեմատիկան ռազմական շատ կիրառություններ ունի: Օրինակ, ավիակոնստրուկտորներն ու հրթիռային համակարգերի մասնագետներն իրենց աշխատանքը չէին կարող կատարել առանց տարրական մաթեմատիկայի: Այդպիսի կիրառությունների ընդհանուր արդյունքը պարզ է. մաթեմատիկան նպաստում է (թեկուզ ոչ այնքան ակնհայտ, ինչպես ֆիզիկան կամ քիմիան) ժամանակակից «ընդհանուր» պատերազմ վարելուն:

Արժե՞ափսոսալ, որ այսպես է. այնքան էլ պարզ չէ, ինչպես առաջին հայացքից է թվում, քանի որ ժամանակակից գիտական պատերազմի մասին երկու հակադիր կարծիք կա: Առաջին, առավել ակնհայտ, կարծիքի համաձայն գիտության ազդեցությունը պատերզմի վրա այն է, որ գիտությունն ահագնացնում է պատերազմի սարսափները՝ ավելացնելով փոքրամասնության տանջանքները, ովքեր ստիպված են կռվել, և այդ տառապանքը տարածելով մյուս դասերի վրա: Սա ամենաբնական և օրթոդոքսալ տեսակետն է: Բայց կա և այլ, առաջինից շատ տարբեր կարծիք, որը նույնպես տրամաբանական է թվում: Դա Հոլդեյնն է շատ հուժկու ձևակերպել «Կալինիկուս»-ում: Կարելի է համաձայնել, որ ժամանակակից պատերազմը պակաս սարսափելի է, քան նախագիտական ժամանակներինը, որ ռումբը, որպես զենք, ավելի մարդասիրական է, քան սվինը, որ արցունքաբեր և կծու գազերը, ինչքան հնարավոր է հասկանալ, ռազմական գիտության կողմից ստեղծված ամենամարդասիրական զենքն են, և որ օրթոդոքսալ տեսակետը բացառապես անորոշ հասկացություններով գործող զգացմունքայնությունից է սնվում: Կարելի է նաև պնդել (չնայած սա չէր մտնում Հոլդեյնի դրույթների մեջ), որ ռիսկերի ենթադրվող հավասարեցումը, որ գիտությունն ի վերջո կբերի, հուսադրող է՝ քաղաքացիական անձի կյանքն ավելի մեծ արժեք չունի, քան զինվորականինը, իսկ կնոջ կյանքն ավելին չարժե, քան տղամարդունը, ինչը, եթե կուզեք, ավելի լավ է, քան բարբարոսության կենտրոնացումը մի որևէ դասակարգում, և որ, կարճ ասած, որքան պատերազմն «իրեն սպառի», այնքան ավելի լավ:

Չգիտեմ, թե թվարկված դրույթներից որն է ճշմարտությանն ավելի մոտ: Այս հարցը միանգամայն հրատապ է և շատերին է հուզում, բայց չէի ցանկանա կանգ առնել դրա քննարկման վրա: Այն միայն «պարզունակ» մաթեմատիկան է շոշափում, որը պաշտպանելու հարցը Հոգբենինն է, ոչ թե իմը: Նրա մաթեմատիկան ահագին արատավորված է ռազմական գործերի մասնակցությամբ, մինչդեռ իմ մաթեմատիկան ոչ մի առնչություն չունի դրանց:

Այս առիթով մի բան էլ կարելի է ասել, քանի որ գոնե մի նպատակ կա, հանուն որի իսկական մաթեմատիկան կարող է ծառայել պատերազմին: Երբ աշխարհը խելագարվում է, մաթեմատիկոսն անասելի հանգստացնող միջոց կարող է գտնել մաթեմատիկայում: Բոլոր արվեստներից և գիտություններից մաթեմատիկան ամենամաքուրն ու ամենավերացականն է, և բոլոր մարդկանցից մաթեմատիկոսը պիտի լինի այն մարդը, որ ամենահեշտը կարող է ապաստան գտնել այնտեղ, որտեղ Բերտրան Ռասելի խոսքերով «մեր ազնիվ մղումներից գոնե մեկը կարող է ապաստան գտնել և փրկություն իրական աշխարհի ձանձրալի գերությունից»: Ցավալի է, որ այստեղ ստիպված ենք մի կարևոր պնդում անել՝ մաթեմատիկոսը շատ ծեր չպիտի է լինի: Մաթեմատիկան հայեցողական գիտություն չէ, այլ ստեղծագործական. ստեղծագործելու կարողությյունը և ցանկությունը կորցրած մարդը չի կարող մաթեմատիկայից շատ մեծ սփոփանք ստանալ: Մաթեմատիկոսը շատ շուտ է հասնում այդ վիճակին: Ցավալի է, բայց մաթեմատիկոսը դրա հետ ոչինչ չի կարող անել, և դրա մասին անհանգստանալը հիմարություն կլինի:

29

Կավարտեմ նրանով, որ իմ եզրակացությունների ամփոփումը կանեմ, բայց կշարադրեմ ավելի անձնական ոճով: Սկզբում ասել էի, որ ով զբաղվում է իր աշխատանքը պաշտպանելով, նկատում է, որ զբաղվում է ինքն իրեն պաշտպանելով, և պրոֆեսիոնալ մաթեմատիկոսի իմ արդարացումը, եթե խորանանք, սեփական կյանքս արդարացնելու փորձ է: Այդ պատճառով էլ «Արդարացման» վերջին բաժինը իրականում իմ ինքնակենսագրության մասն է:

Ինչքան ինձ հիշում եմ, երբեք չեմ ցանկացել մաթեմատիկոսից բացի ուրիշ մասնագետ դառնալ: Կարծում եմ, որ միշտ պարզ է եղել, որ իմ անձնական կարողությունները հենց մաթեմատիկայի բնագավառում են, և երբեք մտքովս չի անցել մեծերի որոշմանը կասկածել: Չեմ հիշում, որ երեխա ժամանակ հատուկ կիրք ունենայի մաթեմատիկայի հանդեպ, և մաթեմատիկոսի ապագայի նկատմամբ պատկերացումները, որ այդ ժամանակ կարող էին ձևավորվել իմ մեջ, հեռու էին վեհ և ազնիվ լինելուց: Մաթեմատիկայի մասին մտածում էի որպես քննությունների և թոշակների շարքի. ես ցանկանում էի հաղթել մյուս տղաներին, և ինձ թվում էր, որ մաթեմատիկայում իմ երազանքները կարող էի իրականացնել ավելի ամբողջական:

Մոտ տասնհինգ տարեկան էի, որ (շատ տարօրինակ ձևով) իմ հավակնություններն ավելի որոշակի գծագրվեցին: Ոմն «Ալան Սենտ-Օբինի» գրչին պատկանող մի գիրք կա՝ «Տրինիտի-քոլեջի անդամը» վերնագրով, այն տիպի գրքերից մեկը, որ նկարագրում են, ինչպես ենթադրվում է, թե ինչպիսին է կյանքը քեմբրիջյան քոլեջներում: Կարծում եմ, որ այս գիրքը ավելի վատն էր, քան Մորի Կորելիի շատ գրքեր, բայց տիկին Մարշալի գիրքը չէր կարող բոլորովին վատը լինել, եթե այն կարողացավ վառել տասնհինգամյա տղայի երևակայությունը: Գրքում երկու հերոս կա՝ գլխավորը Ֆլաուերս ազգանունով, որ գրեթե միշտ լավն է եղել, և երկրորդական՝

Բրաուն ազգանունով, ավելի պակաս վստահելի մի մարդ: Համալսարանական կյանքում Ֆլաուերսին և Բրաունին բազմաթիվ վտանգներ էին սպասում, որոնցից ամենասարսափելին Չեստերտոնի խաղատունն էր, որի տերերը երկու հմայիչ, բայց շատ փչացած կանայք էին: Ֆլաուերսը հաջողությամբ հաղթահարում է բոլոր գայթակղությունները, ունենում երկրորդ կարգ և Ավագ դաս, ինչը մեքենայորեն ապահովում էր նրա՝ քոլեջի անդամ ընտրվելը (հուսով եմ, որ հենց այդպես էլ եղել է): Ինչ վերաբերում է Բրաունին, նա փորձություններին չի դիմանում, սնանկացնում է իր ծնողներին, խմում և սպիտակ տենդից փրկվում միայն կրտսեր դեկանի աղոթքների շնորհիվ, շատ դժվարությամբ բակալավրի աստիճան ստանում և վերջապես դառնում միսիոներ: Բրաունի այս անհաջողությունները չեն խաթարում նրանց ընկերությունը, և պրոֆեսորական ճաշարանում իր առաջին երեկոյան խարկած շագանակով պորտվեյնը խմելիս Ֆլաուերսը սրտացավ ափսոսանքով մտածում է խեղճ Բրաունի մասին: Ֆլաուերսը փառահեղ տղա էր (ոքանով «Ալան Սենտ-Օբինը» պատկերել է նրա կերպարը), բայց նույնիսկ իմ անմշակ ուղեղը հրաժարվում էր նրան խելոք համարելուց: Սակայն եթե նա կարողացավ անել այն ամենը, ինչ գրված էր գրքում, ինչո՞ւ նույնը չեմ կարող ես անել: Մասնավորապես, ինձ հիացմունք էր պատճառում վերջին դրվագը պրոֆեսորական ճաշարանում, և այդ ժամանակից մինչև իմ Տրինիտի-քոլեջի անդամ դառնալը մաթեմատիկան ինձ համար հիմնականում նշանակում էր Տրինիտիի անդամություն:

Գալով Քեմբրիջ՝ իմացա, որ քոլեջին անդամակցելը ենթադրում է «ինքնատիպ աշխատանք», բայց քիչ ժամանակ չանցավ, մինչև ձևավորվեց իմ ինչ-որ չափով պարզ պատկերցումն իմ ինքնուրույն հետազոտության մասին: Հասկանալի է, որ դպրոցում, ինչպես և ցանկացած ապագա մաթեմատիկոս, նկատել էի, որ հաճախ խնդիրն ավելի լավ եմ կարողանում լուծել, քան իմ ուսուցիչը, և նույնիսկ Քեմբրիջում ինձ հաջողվում էր խնդիրները որոշ դասավանդողներից ավելի լավ լուծել, չնայած դա, բնական է, ավելի հազվադեպ էր պատահում, քան դպրոցում: Բայց իրականում, նույնիսկ այն ժամանակ, երբ հանձնեցի Տրայպոսը, մնացի էլի նույն անգետն այն հարցերում, որոնց նվիրեցի ամբողջ մնացած կյանքս: Մաթեմատիկայի մասին առաջվա նման մտածում էի, որպես «մրցակցային» գիտության: Առաջին անգամ աչքերս պրոֆեսոր Լյավը բացեց, ով ինձ մի քանի կիսամյակ դասավանդեց: Նրանից նաև մաթեմատիկական անալիզի մասին առաջին լուրջ պատկերացումը ստացա: Բայց նրան ամենից շատ պարտական եմ այն բանի համար, որ լինելով ըստ էության կիրառական մաթեմատիկոս՝ ինձ խորհուրդ տվեց կարդալ Ժորդանի հայտնի «Մաթեմատկական անալիզի դասընթաց»-ը: Երբեք չեմ մոռանա զարմանքը, որ պատեց ինձ այդ հրաշալի գիրքը կարդալիս, որը իմ սերնդի շատ մաթեմատիկոսների համար առաջին ոգեշնչման աղբյուր է եղել: Այն կարդալով՝ առաջին անգամ հասկացա, թե ինչ է մաթեմատիկան: Այդ ժամանակվանից իմ սեփական ձևով դարձա իսկական («իրական») մաթեմատիկոս՝ առողջ մաթեմատիկական հավակնություններով և մաթեմատիկայի նկատմամբ իսկական կրքով:

Հաջորդ տասը տարիների ընթացքում շատ աշխատանքներ գրեցի, բայց դրանցից քչերը ինչ-որ նշանակություն ունեին. դրանցից միայն չորսը կամ հինգը կարող եմ հիշել որոշ բավարարվածությամբ: Իմ կարիերայում իսկական շրջադարձ երկու անգամ է եղել տասը-տասներկու տարի հետո՝ 1911թ., երբ սկսեցի Լիթլվուդի հետ երկարատև համագործակցությունը, և 1913թ., երբ բացահայտեցի Ռամանուջանին: Այդ ժամանակվանից իմ բոլոր լավ աշխատանքները կապված են նրանց աշխատանքների հետ, և կասկած չի հարուցում, որ նրանց հետ իմ համագործակցությունը վճռական էր իմ կյանքում: Հիմա էլ, երբ ստիպված եմ լինում լսել սնափառ ձանձրացնող մարդկանց, ինքս ինձ ասում եմ,. «Ամեն դեպքում ինձ հաջողվեց մի բան անել, որը երբեք չեք կարող անել՝ համագործակցել եմ Լիթլվուդի և Ռամանուջանի հետ հավասարը հավասարի նման»: Հենց Լիթլվուդին և Ռամանուջանին եմ պարտական իմ անսովոր ուշ հասունացման համար. որպես մաթեմատիկոս բացվել եմ, երբ քառասունից մի քիչ անց էի և Օքսֆորդում պրոֆեսոր էի: Հետո եկավ արագ հանգչելու փուլը՝ ծերացող մարդկանց սովորական ճակատագիրը, հատկապես ծերացող մաթեմատիկոսներինը: Վաթսուն տարեկանում մաթեմատիկոսը կարող է բավականին քաջատեղյակ մնալ, բայց անօգուտ է նրանից ինքնատիպ գաղափարներ սպասելը:

Հիմա իմ կյանքը, եթե նկատի ունենանք այն, ինչ համար արժի ապրել, վերջացած է, և ես չեմ կարող այնպիսի բան անել, որը ինչ-որ չափով ավելացնի կամ պակասեցնի նրա արժեքը: Շատ դժվար է անկողմնակալ լինելը, բայց կարծում եմ՝ իմ կյանքը «հաջող» եմ ապրել: Ես բավարար չափով պարգևատրված եմ՝ ոչ պակաս, քան հասնում է իմ կարողություններն ունեցողին: Զբաղեցրել եմ մի շարք կարգին և «կարևոր» պաշտոններ: Համալսարանական հոգնեցնող առօրյայի հետ կապված որևէ հոգս չեմ ունեցել: Ատում էի «դասավանդումը», և դրանով զբաղվելու հարկ շատ քիչ եղավ: Դասավանդման մասով ինչ ինձ բաժին հասավ, բացառապես հետազոտություններ ղեկավարելուն էր հանգում: Սիրում էի դասախոսություններ կարդալ և չափազանց կարող ուսանողների համար շատ դասախոսություններ եմ կարդացել, և միշտ շատ ժամանակ եմ ունեցել սեփական աշխատանքով զբաղվելու համար, որոնք կյանքիս մեծագույն և անմոռանալի երջանկությունն էին: Պարզվեց, որ հեշտությամբ կարող եմ աշխատել ուրիշների հետ, և ինձ հաջողվեց էականորեն համագործակցել երկու արտակարգ մաթեմատիկոսների հետ: Սա ինձ հնարավորություն տվեց մաթեմատիկայում շատ ավելի ներդրում անելու, քան կարող էի խոհեմաբար հույս ունենալ: Ինչպես ցանկացած մաթեմատիկոս, ես էլ եմ հիասթափություններ ունեցել, բայց դրանցից ոչ մեկն այնքան լուրջ չէր, որ ինձ դժբախտ դարձներ: Եթե քսան տարեկանում ինձ առաջարկեին հենց այսպիսի կյանք ապրել՝ ո՛չ ավելի լավ, ո՛չ վատ, կհամաձայնեի առանց տատանվելու:

Անհեթեթություն կլիներ կարծելը, թե կարող էի «ավելիին» հասնել: Չունեմ ո՛չ լեզվաբանական, ո՛չ արտիստիկ կարողություններ և ոչ մի հետաքրքրություն չունեմ փորձարարական գիտությունների նկատմամբ: Տանելի փիլիսոփա կարող էի լինել, բայց ոչ շատ յուրօրինակ: Համարում եմ, որ ինձանից լավ փաստաբան կստացվեր, բայց լրագրությունն ակադեմիական կյանքից դուրս միակ մասնագիտությունն է, որում կարող էի իրական հաջողության հնարավորություն ունենալ: Կասկած չկա, որ մաթեմատիկոսի մասնագիտությունը ճիշտ եմ ընտրել, եթե դատենք այն չափանիշով, ինչը ընդունված է հաջողություն համարել:

Այսպիսով, եթե ցանկանայի խելամիտ հարմարավետ ու երջանիկ կյանք, ապա իմ ընտրությունը ճիշտ էր: Բայց փաստաբանները, բորսային միջնորդներն ու բուքմեյքերները ոչ հազվադեպ նույնպես հարմարավետ ու երջանիկ կյանք են վարում, և կարծես չի երևում, որ աշխարհը ավելի հարստանա նրանց գոյությամբ: Ինչ-որ իմաստ կա՞ այն պնդման մեջ, որ իմ կյանքը պակաս անօգուտ է, քան նրանցը: Եվ նորից միայն մեկ հնարավոր պատասխան եմ տեսնում՝ գուցե և կա, բայց եթե անգամ այդպես է, ապա միայն մեկ պատճառով:

Ես երբեք ոչ մի «օգտակար» բան չեմ արել: Իմ ոչ մի հայտնագործություն ո՛չ ուղղակիորեն, ո՛չ անուղղակիորեն չի նպաստել բարու կամ չարի ավելացմանը և դույզն-ինչ ազդեցություն չի թողել աշխարհի բարեկեցության վրա: Օգնել եմ ուրիշ մաթեմատիկոսներ դաստիարակելու, բայց այնպիսի մաթեմատիկոսներ, ինչպիսին ես եմ, և նրանց աշխատանքներն էլ, գոնե այն մասով, որով ես օգնել եմ, նույնքան անօգտակար են, որքան իմ սեփական աշխատանքները: Ցանկացած կիրառական չափանիշներով իմ մաթեմատիկական կյանքի արժեքը զրո է, իսկ մաթեմատիկայից դուրս, այսպես թե այնպես՝ աննշան: Ընդամենը մի հնարավորություն ունեմ պարզունակ լինելու դատավճռից խուսափելու համար՝ եթե ընդունվի, որ այնպիսի բան եմ ստեղծել, ինչ արժանի էր ստեղծվելու: Որ ինձ հաջողվել է այդպիսի բան ստեղծել՝ կասկած չկա. հարց է միայն, թե որքա՛ն արեքավոր է իմ ստեղծածը:

Իմ կյանքի իմաստը կամ մեկ ուրիշինը, որ մաթեմատիկոս է եղել այն իմաստով, ինչ իմաստով մաթեմատիկոս էի ես, հետևյալն է. ես ինչ-որ բան եմ տվել գիտելիքների գանձարանին և ուրիշներին էլ եմ օգնել նույն բանը անելու, և այդ «ինչ-որ բանները» օժտված են արժեքով, որը մեծ մաթեմատիկոսների կամ ցանկացած այլ նկարիչների, որ իրենցից հետո թողել են անձեռակերտ հուշարձաններ, մեծ կամ փոքր ստեղծագործություններից տարբերվում էր միայն մեծությամբ, բայց ոչ էությամբ:

Թարգմանությունը ռուսերենից՝ Գևորգ Հակոբյանի: